OMK 2019 - KLASA E 9-TË

Detyra 1. Të njehsohet shprehja $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots - 2018^2 + 2019^2$.

Zgjidhje: Duke e shfrytëzuar barazimin $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 = n + (n+1)$, kemi:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots - 2018^2 + 2019^2 = 1^2 + (3^2 - 2^2) + \cdots + (2019^2 - 2018^2)$$

$$= 1 + 5 + 9 + \cdots + 4037 \qquad \text{(3 pikë)}$$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 2018 + 2019 \qquad \text{(1 pikë)}$$

Duke e shfrytëzuar formulën $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, kemi:

$$= \frac{2019 \cdot 2020}{2} \qquad \text{(3 pikë)}$$

$$= 2019 \cdot 1010$$

$$= 2039190. \qquad \text{(1 pikë)}$$

Detyra 2. Tregoni që kur prodhimit të tre numrave të njëpasnjëshëm natyrorë iu shtohet mesi aritmetik i tyre fitohet kubi i një numri natyror.

Zgjidhje: Le të shënojmë me $n, n+1, n+2$ tre numra të njëpasnjëshëm, atëherë prodhimi i tyre është i barabartë me $n(n+1)(n+2)$, kurse mesi aritmetik i tyre është $\frac{n+(n+1)+(n+2)}{3}$. Prandaj, kemi që

$$n(n+1)(n+2) + \frac{n + (n+1) + (n+2)}{3} =$$

(2 pikë)

$$= n(n+1)(n+2) + \frac{3(n+1)}{3}$$

(1 pikë)

$$= n(n+1)(n+2) + (n+1)$$

(1 pikë)

$$= (n+1)(n(n+2)+1) = (n+1)(n^2+2n+1)$$

(2 pikë)

$$= (n+1)(n+1)^2 = (n+1)^3$$

(2 pikë)

Detyra 3. Le të jetë $ABCD$ drejtkëndësh ashtu që $AB > BC$. Le të jenë E, F pika në brinjën CD ashtu që $CE = ED$ dhe $BC = CF$. Tregoni që nëse BE është normale në AC, atëherë $AB = BF$.

Zgjidhje: Le të jetë G pikëprerja e segmenteve BE dhe AC. Nga trekëndëshat kënddrejtë: ABC, BGC, dhe BCE kemi që

$$\angle BAC = 90^\circ - \angle BCA = 90^\circ - \angle BCG = \angle CBG = \angle CBE$$

(3 pikë)

Meqë $\angle ECB = \angle CBA = 90^\circ$, rrjedh se $ECB \sim CBA$.

(1 pikë)

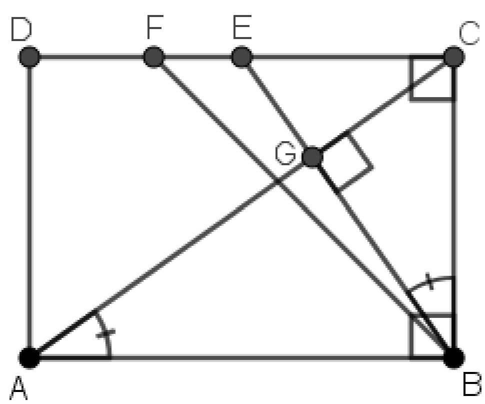
Nga relacioni i fundit kemi:

$$\frac{CE}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{2BC} = \frac{BC}{AB}$$

(1 pikë)

$$\Rightarrow (AB)^2 = 2(BC)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}BC$$

(1 pikë)



Tani, nga teorema e Pitagorës për trekëndëshin kënddrejtë barakrahësh BCF kemi:

$$BF^2 = BC^2 + CF^2 = 2BC^2 \Rightarrow BF = \sqrt{2}BC = AB.$$

(2 pikë)

Detyra 4. Gjeni të gjitha vargjet e numrave të njëpasnjëshëm natyrorë ashtu që shuma e tyre të jetë e barabartë me 2019.

Zgjidhja. Le të jenë $n, n+k$ numri më i vogël dhe numëri i madh, përkatësisht. Nga kushti i detyrës kemi:

$$n + (n+1) + \cdots + (n+k) = \frac{(k+1)(2n+k)}{2} = 2019$$

(2 pikë)

Barazimi i fundit është i barazvlefshëm me:

$$(k+1)(2n+k) = 2 \cdot 3 \cdot 673$$

ku $2,3,673$ janë numra të thjeshtë.

(2 pikë)

Meqë $2n + k > k + 1$, atëherë kemi $k + 1 \in \{2,3,6\} \Rightarrow k \in \{1,2,5\}$.

(1 pikë)

Nëse $k = 1$ merret $2n + 1 = 2019 \Rightarrow n = 1009$. Prandaj, një varg i tillë është $1009,1010$.

(1 pikë)

Nëse $k = 2$ merret $2n + 2 = 1346 \Rightarrow n = 672$. Prandaj, një varg i tillë është $672,673,674$.

(1 pikë)

Nëse $k = 5$ merret $2n + 5 = 673 \Rightarrow n = 334$. Prandaj, një varg i tillë është $334,335,336,337,338,339$.

(1 pikë)

Detyra 5. Një nxënës i shkroi në tabelë numrat $1,2,3, \dots ,18$. Sa numra minimalisht duhet t'i fshijë në tabelë ashtu që për çdo dy numra të mbetur në tabelë shuma e tyre nuk është katror i plotë i një numri natyror.

Zgjidhje: Nëse i fshijmë numrat: 3,5,7,8,10,12,14,15,16 në tabelë, atëherë numrat që do të mbesin në tabelë janë: 1,2,4,6,9,11,13,17,18. Shuma e çdo dy numrave të mbetur nuk është katror i një numri të plotë. Pra, është e mundur t'i fshijmë 9 numra në tabelë ashtu që shuma e çdo dy numrave të mbetur nuk është katror i një numri të plotë.

(2 pikë)

Tregojmë tani që gjithmonë duhet t'i fshijmë të paktën 9 numra që të plotësohet kushti i detyrës, vërtetë:

$$(18,7), (17,8), (16,9), (15,1), (14,2), (13,3), (12,4), (11,5), (10,6)$$

(3 pikë)

Meqë çdo dyshe është disjunkte me njëra-tjetrën dhe shuma e çdo dysheve është katror i plotë, ateherë kemi që në secilën dyshe të paktën njëri nga numrat duhet të fshihet nga tabela. Pra, duhet patjetër të paktën 9 numra të fshihen nga tabela.

(2 pikë)

Meqë e kemi gjetur kombinimin për 9 numra, atëherë kemi që minimalisht duhet t'i fshijmë 9 numra nga tabela.

(1 pikë)

Shënim për detyrën e 5-të: Me 1 pikë vlerësohet rezultati në vijim:

Nëse gjenden të gjitha dyshet nga numrat e dhënë të tilla që shuma e tyre është katror i një numri natyror.

Shënim i përgjithshëm për të gjitha detyrat: Me pikë të njëjta vlerësohet çdo rezultat i barazvlefshëm me relacionet përkatëse të paraqitura në skemë.