OMK 2019 - KLASA E 10-TË

Detyra 1. Gjeni tri shifrat e fundit të numrit $\frac{2019!}{2^{1009}}$.

Zgjidhja:

$$\frac{2019!}{2^{1009}} = \frac{2019 \cdot 2018 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{2^{1009}}$$

(1 pikë)

$$= \frac{2019 \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2018 \cdot 2016 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{2^{1009}}$$

(1 pikë)

$$= \frac{2019 \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1009) \cdot (2 \cdot 1008) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1)}{2^{1009}}$$

(2 pikë)

$$= \frac{2019 \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2^{1009} \cdot 1009 \cdot 1008 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{2^{1009}}$$

(2 pikë)

$$= 2019 \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1009 \cdot 1008 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Meqë ky numër e ka faktor numrin 1000, atëherë kemi që tri shifrat e fundit të këtij numri janë 000.

(2 pikë)

Detyra 2. Tregoni se për çfarëdo numra realë pozitivë a, b, c vlen mosbarazia:

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \geq 3(a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Kur arrihet barazimi?

Zgjidhja: Mosbarazia është e barazvlefshme me:

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \geq 3(abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4(a^3+b^3+c^3)+9 \ge 3(abc+ab+bc+ca+a+b+c)$$

(1 pikë)

Nga mosbarazimi mes mesit aritmetik dhe mesit gjeometrik kemi:

$$a^3+b^3+c^3 \ge 3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot c^3} = 3abc$$

(1 pikë)

$$a^3+b^3+1 \ge 3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot 1} = 3ab$$

$$b^3+c^3+1 \ge 3\sqrt[3]{b^3\cdot c^3\cdot 1} = 3bc$$

$$c^3+a^3+1 \ge 3\sqrt[3]{c^3\cdot a^3\cdot 1} = 3ca$$

(2 pikë)

$$a^3+1+1 \ge 3\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1} = 3a$$

$$b^3+1+1 \ge 3\sqrt[3]{b^3\cdot 1\cdot 1} = 3b$$

$$c^3+1+1 \ge 3\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1} = 3c$$

(2 pikë)

Duke i mbledhur anë pë anë mosbarazimet e mësipërme fitojmë mosbarazimin e dëshiruar.

Nga $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc,$ kemi që barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur $a=b=c$.
Nga $a^3+1+1 \ge 3a,$ kemi që barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur $a=1$.

(1 pikë)

Prandaj, barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur $a=b=c=1$. Duke zëvendësuar shohim se për këto vlera arrihet barazimi.

(1 pikë)

Detyra 3. Doktori ka udhëzuar pacientin që të merr 48 tableta gjatë 30 ditëve, ashtu që pacienti të merr së paku 1 tabletë në ditë dhe jo më shumë se 6 tableta në ditë. Tregoni se pa marrë parasysh se si vepron pacienti, do të ekzistojë numri i ditëve të njëpasnjëshme në të cilat numri i përgjithshëm i tabletave që do të merr pacienti do të jetë 11.

Zgjidhja: Le të shënojmë me t_k shumën shumën e tabletave që do të merr pacienti duke filluar nga dita e parë deri te dita e k-të për $k = 1,2, \dots ,30$:

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{30} = 48$$

(1 pikë)

I shtojmë nga 11 secilit anëtar në (1), marrim

$$11 < t_1 + 11 < t_2 + 11 < \cdots < t_{30} + 11 = 59$$

(2 pikë)

Tani, kemi 60 numra ku më i madhi prej tyre është 59. Nga parimi i Dirilehut dy numra duhet të jenë të njejtë.

(1 pikë)

Meqë në relacionin e parë nuk ekzistojnë dy numra të tillë (për shkak të mënyrës se si i kemi përkufizuar numrat t_k), atëherë edhe në relacionin e dytë nuk ekzistojnë numrat e tillë. Rrjedhimisht, ekzistojnë numrat natyrorë $1 \leq i \neq j \leq 30$ ashtu që:

$$t_i = t_j + 11$$

(2 pikë)

Tani, meqë çdo ditë nuk mund t'i pijë më shumë se 6 tableta, atëherë kemi që ai nuk mund t'i pijë 11 tableta për një ditë, rrjedhimisht në disa ditë të njëpasnjëshme numri total i tabletave që do t'i pijë do të jetë i barabartë me 11.

(2 pikë)

Detyra 4. Të caktohen të gjithë numrat realë x, y, z ashtu që të vlejnë barazimet:

$$\begin{cases} \sqrt{x^3 - y} = z - 1 \\ \sqrt{y^3 - z} = x - 1 \\ \sqrt{z^3 - x} = y - 1 \end{cases}$$

Zgjidhja. Nga sistemi merren këto kushte

$$\begin{cases} x^3 - y \geq 0;\ z \geq 1 \\ y^3 - z \geq 0; x \geq 1 \\ z^3 - x \geq 0;\ y \geq 1 \end{cases}$$

(1 pikë)

Duke ngritur në katror ekuacionet e sistemit të dhënë merret:

$$\begin{cases} x^3 - y = z^2 - 2z + 1 \\ y^3 - z = x^2 - 2x + 1 \\ z^3 - x = y^2 - 2y + 1 \end{cases}$$

(1 pikë)

Duke i mbledhur anë për anë barazimet e mësipërme kemi:

$$x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 3$$

(1 pikë)

$$\Rightarrow (x^2+1)(x-1)+(y^2+1)(y-1)+(z^2+1)(z-1)=0$$

(2 pikë)

Nëse ndonjëri nga numrat x, y, z është më i madh se 1, atëherë do të kishim

$$0=(x^2+1)(x-1)+(y^2+1)(y-1)+(z^2+1)(z-1)>0.$$

Por, mosbarazimi i mësipërmë nuk është i mundur, prandaj e vetmja mundësi është që $x=y=z=1$.

(2 pikë)

Duke i zëvendësuar këto vlera në barazimet fillestare vërejmë që kjo është edhe e vetmja zgjidhjet e sistemit.

(1 pikë)

Detyra 5. Le të jetë $ABCDE$ pesëkëndësh i rregullt. Le te jetë F pikëprerja e segmentit AC me BD. Le të jetë G pikë në segmentin AD ashtu që $2AD=3AG$. Le të jetë H mesi i brinjës DE. Tregoni që pikat F, G, H janë kolineare.

Zgjidhja: Le të jetë I pikëprerja e segmenteve EF dhe AD, përkatësisht. Meqë $ABCDE$ është pesëkëndësh i rregullt, atëherë kemi që EF e përgjysmon segmentin AD, prandaj $AI=DI$.

(1 pikë)

Meqë $BD||EA$ dhe $AC||DE$, atëherë $DF||EA$ dhe $FA||DE$, prandaj katërkëndëshi $AFDE$ është parallelogram. Meqë $AI=DI$, atëherë kemi që $EI=FI \Rightarrow EF=2IF$.

(1 pikë)

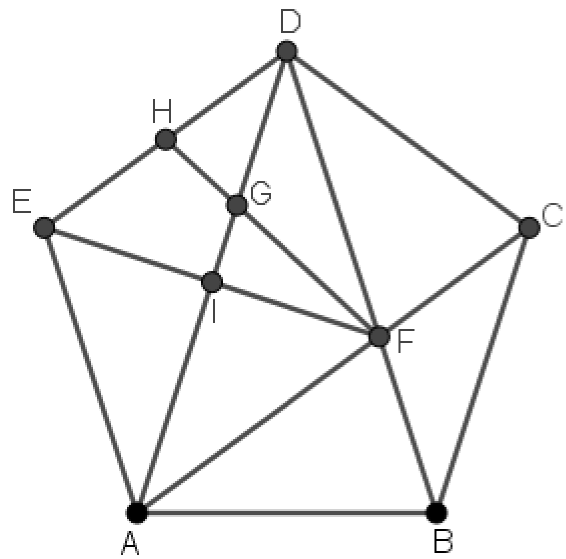
Nga kushti i detyrës kemi:

$$2AD=3AG \Rightarrow 2(AI+IG+DG)=3(AI+IG)$$

(1 pikë)

$$\Rightarrow 2DG=AI+IG=DI+IG=DG+2IG \Rightarrow DG=2IG$$

(2 pikë)



Meqë H është mesi i brinjës DE, atëherë kemi që $DH = EH$. Nga këto relacione për trekëndëshin EID vlen:

$$\frac{EF}{IF} \cdot \frac{IG}{DG} \cdot \frac{DH}{EH} = \frac{2IF}{IF} \cdot \frac{IG}{2IG} \cdot \frac{EH}{EH} = 1$$

(2 pikë)

Meqë pikat D, G ndodhen në brinjët ID, DE, përkatësiht, dhe F ndodhet në drejtëzën EI me renditje të pikave E, I, F, atëherë nga teorema e Menelaut kemi që pikat F, G, H janë kolineare.

(1 pikë)

Shënim i përgjithshëm për të gjitha detyrat: Me pikë të njëjta vlerësohet çdo rezultat i barazvlefshëm me relacionet përkatëse të paraqitura në skemë.