OMK 2019 - KLASA E 11-TË

Detyra 1. Le të jenë a, b numra realë më të mëdhenj se 4. Tregoni që të paktën njëri nga trinomet kuadratike $x^2 + ax + b$ ose $x^2 + bx + a$ i ka dy zgjidhje reale të ndryshme.

Zgjidhje: Le të shënojmë me $D_1,\ D_2$ diskriminantet e trinomeve kuadratike $x^2 + ax + b$, $x^2 + bx + a$, përkatësisht. Le të supozojmë që asnjëri nga trinomet kuadratike nuk i ka dy zgjidhje reale të ndryshme. Atëherë, do të kemi $D_1 \leq 0$ dhe $D_2 \leq 0$.

(2 pikë)

Meqë $D_1 = a^2 - 4b$ dhe $D_2 = b^2 - 4a$, atëherë $a^2 \leq 4b$ dhe $b^2 \leq 4a$.

(2 pikë)

Mirëpo meqë dy numrat a, b janë më të mëdhenj se 4, atëherë $4a < a^2 \leq 4b \Rightarrow a < b$ dhe $4b < b^2 \leq 4a \Rightarrow b < a$, që paraqet kontradiksion.

(3 pikë)

Prandaj $D_1 > 0$ ose $D_2 > 0$, që do të thotë që të paktën njëri nga ekuacionet kuadratike i ka dy zgjidhje të ndryshme reale.

(1 pikë)

Detyra 2. Gjeni të gjithë numrat natyrorë n ashtu që $6^n + 1$ kur shënohet në formën decimale i ka të gjitha shifrat e njëjta.

Zgjidhje: Së pari e testojmë detyrën për disa vlera të vogëla të n-së. Nëse $n = 1$, atëherë $6^1 + 1 = 7$. Pra, plotësohet kushti. Nëse $n = 2$, atëherë kemi $6^2 + 1 = 37$. Pra, nuk plotësohet kushti i detyrës. Nëse $n = 3$, atëherë $6^3 + 1 = 217$. Pra, nuk plotësohet kushti i detyrës. Nëse $n = 4$, atëherë $6^4 + 1 = 1297$. Pra, nuk plotësohet kushti i detyrës.

(1 pikë)

Le të shqyrtojmë rastin kur $n \geq 5$. Lehtë vërejmë që

$6^n \equiv 6(mod\ 10) \Rightarrow 6^n + 1 \equiv 7(mod\ 10)$. Pra, shifra e fundit duhet të jetë 7, rrjedhimisht numri $6^n + 1$ të gjitha shifrat duhet t'i ketë të barabarta me 7.

(1 pikë)

Le të shënojmë me m numrin e shifrave të numrit 6^n+1, atëherë kemi:

$$6^n+1=\underbrace{\overline{77\ldots7}}_{m}=7\cdot\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{m}=7\cdot\left(\frac{10^m-1}{9}\right)$$

(1 pikë)

$$\Rightarrow 9(6^n+1)=7(10^m-1)$$

$$\Rightarrow 9\cdot 6^n+9=7\cdot 10^m-7 \Rightarrow 9\cdot 6^n+16=7\cdot 10^m$$

(1 pikë)

$$\Rightarrow 16(2^{n-4}\cdot 3^{n+2}+1)=7\cdot 2^m\cdot 5^m$$

(1 pikë)

Meqë $2^{n-4}\cdot 3^{n+2}+1$ është numër tek, atëherë $2^4||2^m$. Pra, $m=4$.

(1 pikë)

Pas zëvendësimit kemi: $2^{n-4}\cdot 3^{n+2}+1=7\cdot 5^4=4375 \Rightarrow 2^{n-4}\cdot 3^{n+2}=4374=2\cdot 3^7$

(1 pikë)

$\Rightarrow 2^{n-5}\cdot 3^{n-5}=1 \Rightarrow 6^{n-5}=1=6^0 \Rightarrow n-5=0 \Rightarrow n=5$. Pra, $n=5$ është zgjidhje ($6^5+1=7777$). Prandaj, të gjitha zgjidhjet që e plotësojnë kushtin e detyrës janë $n\in\{1,5\}$.

(1 pikë)

Detyra 3. Le të jetë ABC trekëndësh ashtu që $\angle CAB=60^\circ$. Le të jetë I qendra e rrethit të brendashkruar të trekëndëshit ABC. Le të jenë D dhe E pika në brinjët AC dhe AB, përkatësisht, ashtu që BD dhe CE janë simetrale (përgjysmore) të këndeve $\angle ABC$ dhe $\angle BCA$, përkatësisht. Tregoni që $ID=IE$.

Zgjidhje: Meqë simetralet e këndeve të një trekëndëshi priten në në një pikë (në qendrën e rrethit të brendashkruar të atij trekëndëshi), atëherë kemi që pika I është pikëprerja e drejtëzave BD me CE.

Le t'i shënojmë me β dhe γ këndet te kulmet B dhe C, përkatësisht. Atëherë,

$60^\circ+\beta+\gamma=180^\circ$ prej nga rrjedh se që $\beta+\gamma=120^\circ$.

(1 pikë)

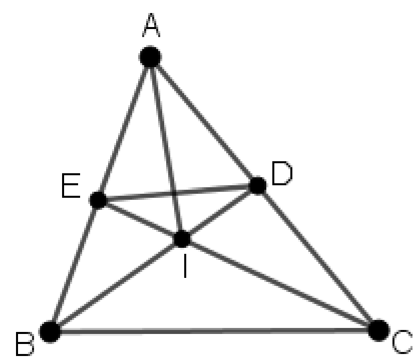
Meqë

$$\angle BIC + \angle ICB + \angle CBI = 180°$$

atëherë,

$$\angle BIC = 180° - \angle ICB - \angle CBI = 180° - \frac{\gamma+\beta}{2} = 180° - 60° = 120°$$

(2 pikë)



Prandaj kemi që $\angle BIE = 180° - \angle BIC = 180° - 120° = 60°$.

(1 pikë)

Meqë $\angle BAD = \angle BIE = 60°$ dhe $\angle DBA = \angle EBI$, atëherë kemi që trekëndëshat

$BAD \sim BIE$, prandaj kemi $\frac{BD}{BE} = \frac{BA}{BI}$. Nga relacionet e fundit kemi:

$BDE \sim BAI$, prandaj $\angle BDE = \angle BAI$.

(1 pikë)

Meqë I është qendra e rrethit të brandashkruar, atëherë kemi që

$$\angle BAI = \frac{\angle CAB}{2} = 30°.$$

(1 pikë)

Prandaj, $\angle IDE = \angle BDE = \angle BAI = 30°$.

(1 pikë)

Në mënyrë të ngjashme gjejmë se $\angle IED = 30°$, rrjedhimisht për trekëndëshin IDE vlen $\angle IDE = \angle IED = 30°$. Pra, trekëndëshi është barakrahësh $(ID = IE)$.

(1 pikë)

Detyra 4. Gjeni të gjitha funksionet $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ashtu që: $f\big(xy + f(x)\big) = xf(y)$

për çdo $x, y \in \mathbb{R}$.

Zgjidhje: Le të shënojmë kushtin fillestar me $P(x, y)$. Marrim $P(x, 0)$, atëherë kemi:

$$f\big(f(x)\big) = xf(0) \tag{1}$$

(1 pikë)

Rasti 1. $f(0) = 0$.

Nga (1) kemi që $f\big(f(x)\big) = 0$. Nga kushti dhe barazimi i fundit kemi:

$$f\big(xf(y)\big) = f\Big(f\big(xy - f(x)\big)\Big) = 0.$$

Atëherë, kemi $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Nëse do të ekzistone numri $u \in \mathbb{R}$ ashtu që $f(u) \neq 0$, atëherë nga $f\big(xf(y)\big) = 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ dhe duke zëvendësuar $x = \frac{u}{f(u)}$, $y = u$ në relacioni e fundit kemi $f(u) = 0$. Pra, nuk është e mundur.

(1 pikë)

Rasti 2. $f(0) \neq 0$.

Le të tregojmë se funksioni është injektiv. Supozojmë se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) \Rightarrow x_1 f(0) = x_2 f(0) \Rightarrow x_1 = x_2$ (nga relacioni (1)).

(1 pikë)

Marrim $P(f(x), y)$ si dhe nga (1) kemi që:

$$f\Big(f(x)y + f\big(f(x)\big)\Big) = f(x)f(y) \Rightarrow f\big(f(x)y + xf(0)\big) = f(x)f(y)$$

Duke ndërruar vendet x, y në relacionin e fundit kemi:

$$f\big(f(y)x + yf(0)\big) = f(y)f(x)$$

(1 pikë)

Prandaj, nga dy relacionet e fundit dhe nga injektiviteti kemi:

$$f\big(f(x)y + xf(0)\big) = f\big(f(y)x + yf(0)\big)$$

$$\Rightarrow f(x)y + xf(0) = f(y)x + yf(0)$$

Duke zëvendësuar $y = 1$ në relacionin e fundit kemi:

$$f(x) + xf(0) = f(1)x + f(0) \Rightarrow f(x) = \big(f(1) - f(0)\big)x + f(0)$$

Prandaj, kemi $f(x) = ax + b \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(1 pikë)

Tani i gjejmë vlerat e konstanteve.

$$f\big(xy + f(x)\big) = xf(y) \Rightarrow f(xy + ax + b) = x(ay + b)$$

$$\Rightarrow axy + a^2x + ab + b = axy + bx \Rightarrow (a^2 - b)x + b(a + 1) = 0$$

(1 pikë)

Meqë duhet të plotësohet kushti $\forall x, y \in \mathbb{R}$, kemi që $a^2 - b = 0$ dhe

$b(a + 1) = 0$. Meqë $b = f(0) \neq 0$, kemi $a = -1$.

(1 pikë)

Tani është e qartë që $b = a^2 = (-1)^2 = 1$.

Prandaj, kushtin e plotëson dhe funksioni:

$$f(x) = 1 - x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Pra, të gjitha funksionet që e plotësojnë kushtin janë:

$$f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \vee \ f(x) = 1 - x \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(1 pikë)

Detyra 5. Janë dhënë pikat me koordinata numra natyrorë (m, n) ashtu që $1 \leq m, n \leq 4$. Dy nxënës, Agoni dhe Beni, luajnë këtë lojë: Së pari Agoni njërën nga pikat e ngjyros me të kuqe, pastaj ia kalon radhën Benit i cili njërën nga pikat e mbetura e ngjyros me të verdhë, pastaj këtë proces e përsëritin disa herë me radhë njëri pas tjetrit. Lojën e fiton ai i cili arrin i pari të formojë një drejtkëndësh me brinjë me gjatësi numra natyrorë, kulmet e të cilave e kanë ngjyrën e njejtë, në të kundërtën loja përfundon pa fitues. A ekziston strategjia për ndonjërin nxënës në mënyrë që të fitojë lojën?

Zgjidhje: Të gjitha mundësitë e gjatësive prej një pike në një pikë tjetër janë: $1, 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{18}$. Është e qartë që drejtkëndëshat që mund të formohet nga këto pika, me gjatësi numra natyrorë, janë drejtkëndësha që brinjët e tyre janë paralele me boshtet O_x dhe O_y.

(1 pikë)

Le të tregojmë që ekziston strategjia për Agonin në mënyrë që ai të fitojë lojën. Meqë Agoni luan i pari, atëherë ai gjithmonë mund që në tri lëvizjet e para ta ketë njërën pikë të tij të ngjyrosur me të kuqe ashtu që kjo pike të jetë në të njejtin rresht ose në të njetjën shtyllë me një pikë të verdhë.

(1 pikë)

Është e qartë që nëse i ndërrojnë vendet përkatëse dy shtylla ose dy rreshta, atëherë nuk ndryshohet kombinimi sepse drejtkëndëshi me gjatësi të brinjëve numra natyrorë në rastin kur ndërrohen dy shtylla (rreshta) me njëra - tjetrën ai drejtkëndësh pasqyrohet përsëri në drejtkëndësh me gjatësi të brinjëve me numra natyrorë.

(1 pikë)

Prandaj, pa humbur asgjë mund të supozojmë që tri lëvizjet e para janë në këtë mënyrë: lëvizja e parë koordinata (1,4) është e ngjyrosur me të kuqe, lëvizja e dytë koordinata (3,3) është e ngjyrosur me të verdhë, lëvizja e tretë koordinata (1,3) është e ngjyrosur me ngjyrë të kuqe (shih figurën).

(1 pikë)

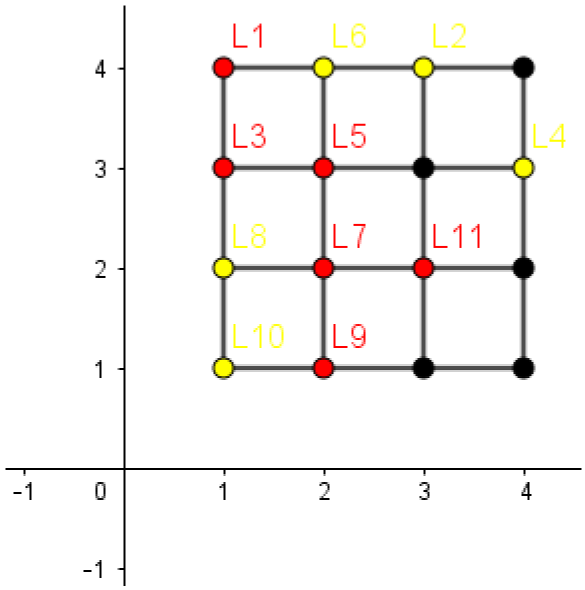
Meqë deri tani shtylla e dytë, shtylla e katërt, rreshti i tretë dhe rreshti i katërt , nuk kanë asnjë pikë të ngjyrosur, atëherë në lëvizjen e katërt është e sigurt që të paktën njëra shtyllë dhe njëri rresht nuk janë ngjyrosur me asnjë ngjyrë.

(1pikë)

Pa humbur asgjë mund të supozojmë që shtylla e dytë dhe rreshti i trëtë nuk kanë asnjë pikë të ngjyrosur. Shqyrtojmë këto raste: 1) kur në lëvizjen e katërt koordinata (4,3) ose (4,4) është e ngjyrosur me të verdhë. 2) kur në lëvizjen e katërt koordinatat (4,3) dhe (4,4) nuk është e ngjyrosur me të verdhë.

(1 pikë)

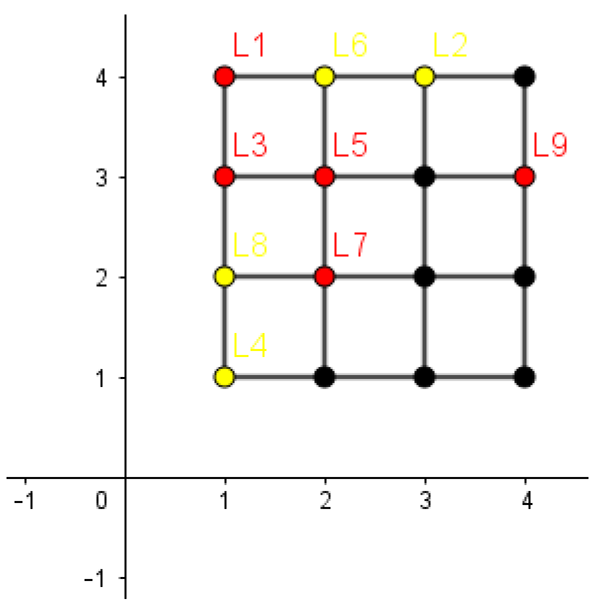
Rasti 1. Pa humbur asgjë mund të supozojmë që koordinata (4,3) është e ngjyrosur me të verdhë. Atëherë në lëvizjen e pestë, Agoni, koordinatën (2,3) e ka ngjyrosur me të kuqe. Pas lëvizjes së pestë, Beni, gjithmonë do të detyrohet t'i ngjyros pikat që Agoni të mos mund të formojë dretkëndësh me gjatësi numra natyror (shih figurën).



Vërejmë që në lëvizjen e trembëdhjetë, Agoni, do të ngjyros koordinatën (3,1) ose (3,3) me të kuqe, në mënyrë që të formojë drejtkëndësh me gjatësi numra natyrorë kulmet e të cilit janë të ngjyrosura me ngjyrë të kuqe (varësisht se ku luan Beni në lëvizjen e dymbëdhjetë).

(1 pikë)

Rasti 2. Pa humbur asgjë mund të supozojmë që koordinata (1,1) është e ngjyrosur me të verdhë. Atëherë, në lëvizjen e pestë, Agoni, koordinatën (2,3) e ka ngjyrosur me të kuqe. Pas lëvizjes së pestë, Beni, gjithmonë do të detyrohet t'i ngjyros pikat që Agoni të mos mund të formojë dretkëndësh me gjatësi numra natyror (shih figurën).



Vërejmë që në lëvizjen e njëmbëdhjetë, Agoni, do të ngjyros koordinatën $(4,2)$ ose $(4,3)$ me të kuqe, në mënyrë që të formojë drejtkëndësh me gjatësi numra natyrorë kulmet e të cilit janë të ngjyrosura me ngjyrë të kuqe (varësisht se ku luan Beni në lëvizjen e dhjetë).

(1pikë)

Shënim i përgjithshëm për të gjitha detyrat: Me pikë të njëjta vlerësohet çdo rezultat i barazvlefshëm me relacionet përkatëse të paraqitura në skemë.