

## OMK 2019 - KLASA E 12-TË

*Koha në dispozicion: 240 minuta. Çdo detyrë vlerësohet me 8 pikë.*

*Ju lutemi që të shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Suksese!*

**Detyra 1.** A ekziston trekëndëshi me brinjë  $a, b, c$  ashtu që:

a) 
$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 13 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 28 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 13 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 30 \end{cases}$$

**Detyra 2.** Supozojmë që secila pikë e rrafshit është e ngjyrosur me njërën nga ngjyrat e kuqe ose të verdhë. Tregoni që ekziston pesëkëndëshi konveks me tri kënde të drejta ashtu që të gjitha kulmet i ka me ngjyrë të njëjtë.

**Detyra 3.** Le të jenë  $a, b, c, d$  numra realë jo-negativë të tillë

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Tregoni që vlen mosbarazia:

$$a + b + c + d - 1 \geq 16abcd$$

Kur arrihet barazimi?

**Detyra 4.** Le të jetë  $ABC$  trekëndësh këndngushtë me rrethin e jashtashkruar  $\omega$ . Le të jetë  $D$  këmbëza e normalës së trekëndëshit  $ABC$  e lëshuar nga pika  $A$ . Le të jenë  $E$  dhe  $F$  meset e brinjëve  $AB$  dhe  $AC$ , përkatësisht. Le të jenë  $P$  dhe  $Q$  pikëprerjet e dyta të rrethit  $\omega$  me rrethët e jashtashkruar të trekëndëshave  $BDE$  dhe  $CDF$ , përkatësisht. Supozojmë se pikat  $A, P, B, Q$  dhe  $C$  janë në këtë renditje në rrethin  $\omega$ . Tregoni që drejtëzat  $EF, BQ$  dhe  $CP$  priten në një pikë.

**Detyra 5.** Gjeni të gjithë numrat natyrorë  $x, y$  ashtu që  $2^x + 19^y$  është kub i plotë i një numri natyror.

*Prishtinë, më 02 mars 2019*