Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

OMK 2019 - KLASA E 12-TË

Detyra 1. A ekziston trekëndëshi me brinjë a, b, c ashtu që:

a)
$$\begin{cases} a+b+c = 6 \\ a^2+b^2+c^2 = 13 \\ a^3+b^3+c^3 = 28 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a+b+c = 6 \\ a^2+b^2+c^2 = 13 \\ a^3+b^3+c^3 = 30 \end{cases}$$

Zgjidhje: a) Jo, nuk ekziston. Në të vërtetë nuk ekzistojnë fare numrat realë pozitivë a, b, c që i plotësojnë këto kushte e aq më parë një trekëndëshi i tillë, në të vertëtë sikur të ekzistonte ndonjë treshe e tillë e numrave atëherë nga mosbarazimi i Koshit do të kemi këtë mosbarazim:

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)^2 \Rightarrow 28 \cdot 6 \geq 13^2 \Rightarrow 168 \geq 169.$$

(3 pikë)

b) Po, ekziston. Gjejmë vlerat e shprehjeve $ab+bc+ca$ dhe abc.

$$ab+bc+ca = \frac{(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2} = \frac{36-13}{2} = \frac{23}{2}$$

(1 pikë)

$$abc = \frac{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{3}$$

$$= \frac{30-6\cdot\left(13-\frac{23}{2}\right)}{3} = \frac{30-6\cdot\frac{3}{2}}{3} = \frac{30-9}{3} = \frac{21}{3} = 7$$ (1 pikë)

Tani kemi sistemin në vijim:

$$\begin{cases} a+b+c \quad = 6 \\ ab+bc+ca = \dfrac{23}{2} \\ abc = 7 \end{cases}$$

Nga formulat e Vietit kemi që a, b, c janë rrënjë të ekuacionit

$$4x^3 - 24x^2 + 46x - 28 = 0.$$

(1 pikë)

Vërejmë që $x = 2$ është zgjidhje e ekuacionit, prandaj ekuacionin mund ta shkruajmë në këtë formë.

$$(x-2)(4x^2 - 16x + 14) = 0 \Rightarrow (x-2)\big(2x - 4 + \sqrt{2}\big)\big(2x - 4 - \sqrt{2}\big).$$

Prandaj numrat a, b, c janë të barabartë me $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ në ndonjë renditje, mund të supozojmë që $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 2$ dhe $c = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1 pikë)

Është e qartë që numrat janë pozitivë dhe $b + c > a$, $c + a > b$. Tregojmë që $a + b > c$, vërtetë mosbarazimi është i barazvlefshëm me $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 > 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{2}$.

(1 pikë)

Detyra 2. Supozojmë që secila pikë e rrafshit është e ngjyrosur me njërën nga ngjyrat e kuqe ose të verdhë. Tregoni që ekziston pesëkëndëshi konveks me tri kënde të drejta ashtu që të gjitha kulmet i ka me ngjyrë të njejtë.

Zgjidhje: Le t'i marrim pikat në sistetmin koordinativ (i, j) me koordinata numra natyrorë ashtu që $1 \leq i \leq 65$ dhe $1 \leq j \leq 5$, gjithsej janë 325 pika. Marrim çdo pesë pika $(i, 1), (i, 2), (i, 3), (i, 4), (i, 5)$ ku $1 \leq i \leq 65$.

(1 pikë)

Meqë pesë pika me dy ngjyra mund të ngjyrosen në $2^5 = 32$ mënyra dhe meqë $65 = 2 \cdot 32 + 1$, atëherë nga parimi i Dirihleut kemi që ekzistojnë numrat natyrorë

$1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq 65$ ashtu që pikat $(i,1),(i,2),(i,3),(i,4),(i,5)$ dhe $(j,1),(j,2),(j,3),(j,4),(j,5)$ dhe $(k,1),(k,2),(k,3),(k,4),(k,5)$ janë të ngyrosura në mënyrë të njejtë në këtë renditje.

(2 pikë)

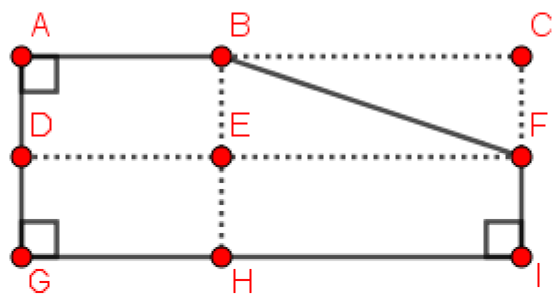
Meqë çdo pikë është e ngjyrosur me vetëm një ngjyrë dhe meqë $(i,1),(i,2),(i,3),(i,4),(i,5)$ janë pesë pika, atëherë nga parimi i Dirihleut kemi që ekzistojnë tre pika me ngjyrë të njejtë. ($5 = 2 \cdot 2 + 1$).

(1 pikë)

Pa humbur asgjë mund të supozojmë që pikat $(i,1),(i,2),(i,3)$ janë të ngjyrosura me ngjyrë të kuqe, rrjedhimisht edhe pikat $(j,1),(j,2),(j,3)$ dhe $(k,1),(k,2),(k,3)$ janë të ngjyrosura me ngjyrë të kuqe.

(1 pikë)

Le t'i shënojmë me A,B,C,D,E,F,G,H,I këto pika, kombinimi ësht sin ë vijim:



Nëse marrim pesëkëndëshin $AGIFB$ kemi që e plotëson kushtin e detyrës sepse të gjitha kulmet janë të ngjyrosura me ngjyrë të kuqe dhe gjithashtu vlen $\angle BAG = \angle AGI = \angle GIF = 90°$. Pra, mbaroi vertetimi!

(3 pikë)

Detyra 3. Le të jenë a,b,c,d numra realë jo-negativë të tillë $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Tregoni që vlen mosbarazia:

$$a+b+c+d-1 \geq 16abcd$$

Kur arrihet barazimi?

Zgjidhje: Mosbarazimi është ekuivalent me

$$a+b+c+d \geq 1+16abcd \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2 \geq (1+16abcd)^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+cd+da+ac+bd) \geq (1+16abd)^2$$

(1 pikë)

Duke përdorur kushtin kemi që mosbarazia është e barazvlefshme me

$$1+2(ab+bc+cd+da+ac+bd) \geq 1+32abcd+256(abcd)^2 \Leftrightarrow$$

$$2(ab+bc+cd+da+ac+bd) \geq 32abcd+256(abcd)^2 \Leftrightarrow$$

$$ab+bc+cd+da+ac+bd \geq 16abcd+128(abcd)^2$$

(1 pikë)

Nga mosbarazia mes mesit aritmetik dhe gjeometrik kemi:

$$ab+bc+cd+da+ac+bd \geq 6\sqrt[6]{(abcd)^3} = 6\sqrt{abcd}$$

(1 pikë)

Prandaj, është e mjaftueshme të tregojmë që:

$$6\sqrt{abcd} \geq 16abcd+128(abcd)^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{abcd} \geq 8abcd+64(abcd)^2$$

Le të zëvendësojmë $abcd = t^2$ ashtu që $t \geq 0$ mosbarazia të transformohet në

$$3t \geq 8t^2+64t^4 \Leftrightarrow 64t^4+8t^2-3t \leq 0 \Leftrightarrow t(4t-1)(16t^2+4t+3) \leq 0$$

Prandaj, është e mjaftueshme të tregohet që $4t \leq 1$.

(2 pikë)

Nga kushti dhe mosbarazia mes mesit aritmetik dhe gjeometri kemi:

$$1 = a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4\sqrt[4]{(abcd)^2} = 4\sqrt[4]{t^4} = 4t.$$

(1 pikë)

Tregojmë tani se kur arrihet barazimi. Nga mosbarazia mes mesit aritmetik dhe gjeometrik kemi:

$$ab + bc + cd + da + ac + bd \geq 6\sqrt{abcd}$$

Është e mundur atëherë dhe vetëm atëherë kur $ab = bc = cd = da = ac = bd$.

Pra, $t(4t - 1)(16t^2 + 4t + 3) = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $t = 0$ ose $t = \frac{1}{4}$. Nëse $t = 0$, atëherë kemi që të paktën njëri nga numrat a, b, c, d është i barabartë me 0. Le të marrim $d = 0$, atëherë nga rasti i mëparshëm kemi

$ab = bc = ac = 0$, rrjedhimisht kemi që të paktën dy nga numrat a, b, c janë të barabartë me 0. Le të marrim $b = c = 0$, atëherë nga kushti kemi që $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$.

(1 pikë)

Shqyrtojmë rastin kur $= \frac{1}{4}$. Atëherë, nga mosbarazia mes mesit aritmetik dhe gjeometrik kjo është e mundur atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = b = c = d$. Nga kushti kemi që $4a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, prandaj $a = b = c = d = \frac{1}{2}$. Pra, barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur:

$$(a, b, c, d) = (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(1 pikë)

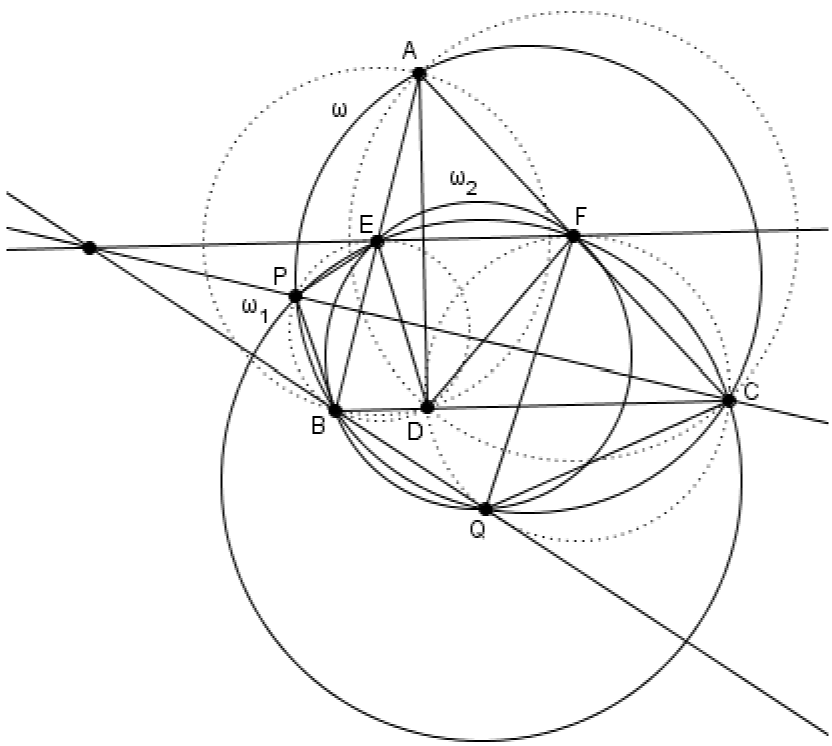
Shënim: Zgjidhja duke i shfrytëzuar shumëzuesit e Lagranzhit duhet të jetë e plotë, ndryshe nëse nuk është e plotë vlerësohet me 0 pikë.

Detyra 4. Le të jetë ABC trekëndësh këndngushtë me rrethin e jashtashkruar ω. Le të jetë D këmbëza e normalës së trekëndëshit ABC e lëshuar nga pika A. Le të jenë E dhe F meset e brinjëve AB dhe AC, përkatësisht. Le të jenë P dhe Q pikëprërjet e dyta të rrethit ω me rrathët e jashtashkruar të trekëndëshave BDE dhe CDF, përkatësisht. Supozojmë se pikat A, P, B, Q dhe C janë në këtë renditje në rrethin ω. Tregoni që drejtëzat EF, BQ dhe CP priten në një pikë.

Zgjidhje: Meqë katërkëndëshi $APBC$ është ciklik, atëherë kemi $\angle BPC = \angle BAC$. Meqë trekëndëshi ADB është kënddrejtë me këndin $\angle ADB = 90°$ dhe meqë E është mesi i brinjës AB kemi që E është qendra e rrethit të jashtashkruar të trekëndëshit ADB, prandaj $ED = EB \Rightarrow \angle EDB = \angle EBD = \angle ABC$.

(1 pikë)

Meqë katërkëndëshi $PBDE$ është ciklik kemi:



$$\angle EPB = 180° - \angle EDB = 180° - \angle ABC \Rightarrow \angle CPE = \angle BPE - \angle BPC$$
$$= 180° - \angle ABC - \angle BAC = \angle BCA$$

(2 pikë)

Meqë E, F janë meset e brinjëve AB, AC, përkatësisht kemi që $EF || BC$ prandaj $\angle CFE = 180° - \angle BCA = 180° - \angle CPE$. Pra, katërkëndëshi $PEFC$ është ciklik. Le të shënojmë me ω_1 rrethin e jashtashkruar të këtij katërkëndëshi.

(1 pikë)

Meqë katërkëndëshi $ABQC$ është ciklik kemi:

$\angle BQC = 180° - \angle BAC$. Trekëndëshi ADC është kënddrejtë me këndin $\angle ADC = 90°$ dhe F është mesi i brinjës AC, atëherђ kemi që F është qendra e rrethit të jashtashkruar të trekëndëshit ADC. Pra,

$$FD = FC \Rightarrow \angle CDF = \angle DCF = \angle BCA$$

(1 pikë)

Katërkëndëshi $CFDQ$ është ciklik, prandaj kemi $\angle CQF = \angle CDF = \angle BCA$

$$\Rightarrow BQF = \angle BQC - \angle CQF = 180° - \angle BAC - \angle BCA = \angle ABC.$$

(1 pikë)

Pikat E, F janë meset e brinjëve AB, AC, përkatësisht, prandaj kemi $EF||BC$, rrjedhimisht $\angle BEF = 180° - \angle ABC = 180° - \angle BQF$. Pra, katërkëndëshi $BEFQ$ është ciklik. Le të shënojmë me ω_2 rrethin e jashtashkruar të këtij katërkëndëshi.

(1 pikë)

Meqë drejtëzat EF, BQ dhe CP janë boshte radikale të rrathëve ω_1 me ω_2 , ω me ω_2 dhe ω_1 me ω, përkatësisht dhe meqë $CP \nparallel BC \Rightarrow CP \nparallel EF$ atëherë nga teorma e boshteve radikale kemi që drejtëzat EF, BQ dhe CP priten në një pikë.

(1 pikë)

Detyra 5. Gjeni të gjithë numrat natyrorë x, y ashtu që $2^x + 19^y$ është kub i një numri natyror .

Zgjidhje: Meqë $2^x + 19^y$ është kub i një numri natyror, atëherë kemi që ekziston numri natyror z ashtu që $2^x + 19^y = z^3$. Meqë

$$(3m + n)^3 = 27m^3 + 27m^2n + 9mn^2 + n^3 \equiv n^3 (mod\ 9),$$

Atëherë, $z^3 \equiv 0^3, 1^3, 2^3 (mod\ 9) \Rightarrow z^3 \equiv 0,1,8 (mod\ 9)$.

Meqë $2^x + 19^z \equiv 2^x + 1 (mod\ 9)$, atëherë kemi $2^x + 1 \equiv 0,1,8 (mod\ 9)$.

Nga relacioni i fund implikon: $2^x \equiv 0,7,8 (mod\ 9)$. Meqë $2^x \equiv 0 (mod\ 9)$ nuk është e mundur, atëherë kemi $2^x \equiv 7,8 (mod\ 9)$. Meqë

$$2^1 \equiv 2 (mod\ 9) \wedge 2^2 \equiv 4 (mod\ 9) \wedge 2^3 \equiv 8 (mod\ 9)$$

$$2^4 \equiv 16(mod\ 9) \equiv 7(mod\ 9) \wedge 2^5 \equiv 32(mod\ 9) \equiv 5(mod\ 9)$$

$$2^6 \equiv 64(mod\ 9) \equiv 1(mod\ 9)$$

Atëherë, $ord_9(2) = 6$. Meqë $2^x \equiv 7,8(mod\ 9)$, atëherë kemi $x \equiv 3,4(mod\ 6)$.

Le të shqyrtojmë detyrën në dy raste.

(2 pikë)

Rasti 1. $x \equiv 4(mod\ 6)$

Meqë

$$0^3 \equiv 0(mod\ 19) \wedge 1^3 \equiv 1(mod\ 19)$$

$$2^3 \equiv 8(mod\ 19) \wedge 3^3 \equiv 27(mod\ 19) \equiv 8(mod\ 19)$$

$$4^3 \equiv 64(mod\ 19) \equiv 7(mod\ 19) \wedge 5^3 \equiv 125(mod\ 19) \equiv 11(mod\ 19)$$

$$6^3 \equiv 216(mod\ 9) \equiv 7(mod\ 19) \wedge 7^3 \equiv 343(mod\ 19) \equiv 1(mod\ 19)$$

$$8^3 \equiv 512(mod\ 19) \equiv 18(mod\ 19) \wedge 9^3 \equiv 729(mod\ 19) \equiv 7(mod\ 19)$$

$$10^3 \equiv -9^3(mod\ 19) \equiv -7(mod\ 19) \equiv 12(mod\ 19)$$

$$11^3 \equiv -8^3(mod\ 19) \equiv -18(mod\ 19) \equiv 1(mod\ 19)$$

$$12^3 \equiv -7^3(mod\ 19) \equiv -1(mod\ 19) \equiv 18(mod\ 19)$$

$$13^3 \equiv -6^3(mod\ 19) \equiv -7(mod\ 19) \equiv 12(mod\ 19)$$

$$14^3 \equiv -5^3(mod\ 19) \equiv -11(mod\ 19) \equiv 8(mod\ 19)$$

$$15^3 \equiv -4^3(mod\ 19) \equiv -7(mod\ 19) \equiv 12(mod\ 19)$$

$$16^3 \equiv -3^3(mod\ 19) \equiv -8(mod\ 19) \equiv 11(mod\ 19)$$

$$17^3 \equiv -2^3(mod\ 19) \equiv -8(mod\ 19) \equiv 11(mod\ 19)$$

$$18^3 \equiv -1^3(mod\ 19) \equiv -1(mod\ 19) \equiv 18(mod\ 19)$$

Prandaj kemi $z^3 \equiv 0,1,7,8,11,12,18(mod\ 19)$.

(1 pikë)

Nga teorema e Fermës kemi: $2^{18} \equiv 1(mod\ 19)$ dhe meqë

$$x \equiv 4(mod\ 6) \Rightarrow x \equiv 4,10,16(mod\ 18).$$

Rasti 1.1. $x \equiv 4(mod\ 18)$, prej nga rrjedh se:

$$2^x + 19^y \equiv 2^4(mod\ 19) \equiv 16(mod\ 19)$$

Rasti 1.2. $x \equiv 10(mod\ 18)$, prej nga rrjedh se:

$$2^x + 19^y \equiv 2^{10}(mod\ 19) \equiv 32 \cdot 32(mod\ 19) \equiv (-6) \cdot (-6)(mod\ 19)$$
$$\equiv 36(mod\ 19) \equiv 17(mod\ 19)$$

Rasti 1.3. $x \equiv 16(mod\ 18)$, prej nga rrjedh se:

$$2^x + 19^y \equiv 2^{16}(mod\ 19) \equiv 256 \cdot 256(mod\ 19) \equiv 9 \cdot 9(mod\ 19)$$
$$\equiv 81(mod\ 19) \equiv 5(mod\ 19)$$

Prandaj, $2^x + 19^y \equiv 5,16,17(mod\ 19)$ që paraqet kontadiksion me

$$2^x + 19^y = z^3$$

(1 pikë)

Rasti 2. $x \equiv 3(mod\ 6)$

Atëherë, ekziston numri natyror tek t ashtu që $x = 3t$. Tani, ekuacioni transformohet në këtë formë:

$$2^{3t} + 19^y = z^3 \Rightarrow z^3 - (2^t)^3 = 19^y \Rightarrow (z - 2^t)(z^2 + z \cdot 2^t + 4^t) = 19^y.$$

Është e qartë që $pmmp(z, 2^t) = 1$ dhe $pmmp(z - 2^t, 3) = 1$, prandaj

$$pmmp(z - 2^t, 3z \cdot 2^t) = 1 \Rightarrow pmmp(z - 2^t, (z - 2^t)^2 + 3z \cdot 2^t) = 1$$

$$\Rightarrow pmmp(z - 2^t, z^2 + z \cdot 2^t + 4^t) = 1$$

Rrjedhimisht kemi: $z - 2^t = 1$ dhe $z^2 + z \cdot 2^t + 4^t = 19^y$.

(1 pikë)

$$\Rightarrow z = 2^t + 1 \Rightarrow (2^t + 1)^2 + (2^t + 1) \cdot 2^t + 4^t = 19^y$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 4^t + 3 \cdot 2^t + 1 = 19^y$$

Për $t = 1$, kemi $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 = 19^y \Rightarrow 19^y = 19 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 2^1 + 1 = 3$

$\Rightarrow x = 3t = 3$. Pra, një zgjidhje që e plotëson kushtin është $(x, y) = (3,1)$.

(1 pikë)

Për $t = 3$, kemi që $19^y = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 2^3 + 1 = 217 = 7 \cdot 31$. Por, barazimi i fundit nuk është i mundur. Tani, shqyrtojmë rastin kur $t \geq 5$. Atëherë, kemi

$$3 \cdot 4^t + 3 \cdot 2^t + 1 \equiv 1(mod\ 8).$$

Meqë $19^1 \equiv 19(mod\ 8) \equiv 3(mod\ 8) \wedge 19^2 \equiv 3^2(mod\ 8) \equiv 1(mod\ 8)$,

Atëherë kemi $ord_8(19) = 2$, rrjedhimisht kemi që y është numër çift. Pra, ekziston numri natyror u ashtu që $y = 2u$. Prandaj ekuacioni transformohet në këtë formë:

$$3 \cdot 2^t(2^t + 1) = 19^{2u} - 1 = (19^u - 1)(19^u + 1)$$

(1 pikë)

Meqë $19^u + 1 - (19^u - 1) = 2 \Rightarrow pmmp(19^u - 1, 19^u + 1) = 2$ sepse $19^u - 1$ dhe $19^u + 1$ janë të dy numra çift. Tani meqë $19^u + 1 \equiv 2,4(mod\ 8)$ dhe $(19^u - 1)(19^u + 1)$ plotpjesëtohet me 2^t dhe meqë 2^{t-1} plotëpjestohet me 8, atëherë kemi që $19^u - 1$ plotëpjestohet me 2^{t-1}. Po ashtu vlen $19^u - 1 \equiv 1 - 1(mod\ 9) \equiv 0(mod\ 9)$, prandaj $19^u - 1$ plotëpjestohet me 9. Pra, ekziston numri natyror v ashtu që

$$19^u - 1 = 9 \cdot 2^{t-1} \cdot v > 3 \cdot 2 \cdot 2^{t-1} = 3 \cdot 2^t.$$

Përfundimisht kemi:

$$3 \cdot 2^t(2^t + 1) = (19^u - 1)(19^u + 1) > 3 \cdot 2^t(3 \cdot 2^t + 2) > 3 \cdot 2^t(2^t + 1)$$

Por, relacioni i fundit paraqet kontradiksion. Prandaj, dyshja e vetme që e plotëson kushtin është $(x, y) = (3,1)$.

(1 pikë)