

OMK 2020 - KLASA E 12-TË

Koha në dispozicion: 240 minuta. Çdo problem vlerësohet me 10 pikë. Ju lutemi, shkruani vetëm në njërën faqe të fletës. Suksese!

1. Dy lojtarë: Agoni dhe Besa e zgjedhin nga një numër, njëri pas tjetrit, nga bashkësia në vijim $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ deri sa të mos mbetet asnjë numër në bashkësi. Pastaj, secili lojtar të gjithë numrat që i ka zgjedhur i mbledhë. Them i për njërin lojtar se e fiton lojën nëse numri i fituar i tij është numër i thjeshtë ndërsa numri i fituar i kundërshtarit të tij është i përbërë, në të kundërtën loja përfundon me barazim. Lojën e fillon Agoni. A ekziston strategjia për ndonjërin lojtar që ta fitojë lojën?
 2. Le të jenë $a_1, a_2, \dots, a_n$ numra të plotë ashtu që $a_1^{20} + a_2^{20} + \dots + a_n^{20}$ plotëpjesëtohet me 2020. Tregoni se $a_1^{2020} + a_2^{2020} + \dots + a_n^{2020}$ plotëpjesëtohet me 2020.
 3. Le të jetë ABC trekëndësh me qendrën e rrethit të brendashkruar I . Le të jenë dhënë pikat D dhe E në segmentet CA dhe BC , përkatësisht, ashtu që $CD = CE$. Le të jetë pika F në segmentin CD . Tregoni se katërkëndëshi $ABEF$ është tangjencial atëherë dhe vetëm atëherë kur katërkëndëshi $DIEF$ është ciklik.
 4. Le të jetë a_0 numër natyror arbitrar. Le të definojmë vargun e pafundmë të numrave natyrorë $\{a_n\}_{n \geq 1}$ në mënyrë induktive si në vijim: nëse janë të dhënë $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, atëherë termi a_n është numri më i vogël natyror ashtu që $\sqrt[n]{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$ është numër natyror. Tregoni se vargu $\{a_n\}_{n \geq 1}$ është eventualisht konstant.
- Shënim:** Vargu $\{a_n\}_{n \geq 1}$ është eventualisht konstant nëse ekziston numri natyror k ashtu që $a_n = c$, për çdo $n \geq k$.