UNIVERSITY OF PRIMORSKA
SCHOLARSHIP COMPETITION

1. Le të jetë $a_0, a_1, a_2, \ldots$ një varg i definuar në mënyrë induktive si vijon: $a_0 = 1, a_1 = 2$ dhe $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$ për $n \geq 0$. Vërtetoni se $a_n = 2^{F_n}$ për $n = 0, 1, 2, \ldots$, ku F_n është anëtari i n-të i vargut Fibonaçi $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.

Zgjidhje 1. Vërejmë se $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

(1 pikë)

Përdorim parimin e induksionit matematik. Për $n = 0, 1$, qartazi vlen.

(1 pikë)

Supozojmë se vlen për $0, 1, \ldots, n$ për ndonjë $n \geq 1$. Atëherë,

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1} = 2^{F_n + F_{n-1}} = 2^{F_{n+1}}.$$

(8 pikë)

Zgjidhje 2. Vërejmë se $a_n > 0$, prandaj $\log_2 a_n$ është i përkufizuar.

(1 pikë)

Tutje, $\log_2 a_{n+2} = \log_2 a_{n+1} + \log_2 a_n$ dhe vlerat fillestare për $n = 0, 1$ janë të njejta me vargun e dhënë. Prandaj, $\log_2 a_n = F_n$, prej nga $a_n = 2^{F_n}$.

(9 pikë)

Shënim 1. Zgjidhjet tek të cilat mungon ose baza e induksionit ose shqyrtimi i vlerave fillestare ndëshkohen me -1 pikë.

Shënim 2. Zgjidhjet tek të cilat mungon argumentimi se $\log_2 a_n$ është i përkufizuar nuk ndëshkohen.

2. Le të jetë $C_1\colon x^2+y^2=1$ rrethi njësi, ndërsa $C_2\colon x^2+y^2=4$ rrethi me qendër në origjinë dhe rreze 2 njësi.

i. Për ndonjë pikë $P=(x_0,y_0)$ në rrethin C_2, shkruani ekuacionet e tangjenteve të C_1 që kalojnë nëpër pikën P.

ii. Për ndonjë pikë P në rrethin C_2, le të jenë Q,R pikat ku tangjentet nga pjesa i. takojnë rrethin C_1. Tregoni se syprina e sipërfaqes së trekëndëshit PQR nuk varet nga pika P.

Zgjidhje.

i. Supozojmë se drejtëza $y=mx+n$ kalon nëpër pikën $P(x_0,y_0)$, pra $y_0=mx_0+n$. Tutje, $x_0^2+y_0^2=4$. Kushti që drejtëza $y=mx+n$ të jetë tangjentë e rrethit njësi është $m^2+1=n^2$.

(1 pikë)

Duke shprehur $n=y_0-mx_0$ dhe duke përdorur $(y_0-mx_0)^2=m^2+1$, fitojmë

$$m_{1,2}(x_0,y_0)=\frac{x_0y_0\pm\sqrt{x_0^2+y_0^2-1}}{x_0^2-1}=\frac{x_0y_0\pm\sqrt{3}}{x_0^2-1},$$

për $x_0^2\neq 1$ dhe

$$m_{1,2}(x_0,\pm\sqrt{3})=\pm\frac{y_0^2-1}{2y_0},$$

për $x_0=1,-1$, përkatësisht.

(3 pikë)

Pasi ekzistojnë vetëm 2 tangjente, përfundojmë se tangjentet për $0\leq x_0\leq 1$ në kuadrantin e parë janë

$$y=m_1(x_0,y_0)x+\sqrt{m_1(x_0,y_0)^2+1},\, y=m_2(x_0,y_0)x+\sqrt{m_2(x_0,y_0)^2+1}$$

dhe ngjashëm për intervalet tjera të x_0 në kuadrantet përkatëse. (Duhet pasur kujdes me zgjedhjen e shenjave $\pm$!)

(1 pikë)

ii. Pohimi rrjedh menjëherë nga simetria rotacionale.

(5 pikë)

Shënim 1. Zgjidhjet tek të cilat nuk shqyrtohen rastet $x_0=\pm 1$ me kujdes ndëshkohen me -1 pikë.

Shënim 2. Zgjidhjet tek të cilat pa humbur nga përgjithësimi dhe duke shfrytezuar simetrinë, shkruhen ekuacionet e tangjenteve vetëm për ndonjërin kuadrant, nuk ndëshkohen.

Shënim 3. Zgjidhjet tek të cilat pjesa ii. është zgjidhur me anë të ekuacioneve me gabime gjatë rrugës, ndëshkohen me -1 pikë.

3. Në një qytet ideal, janë $2 \cdot 2021$ shtëpi të rregulluara në dy kolona me numër të njejtë të shtëpive të vendosura përballë njëra-tjetrës. Themi se dy shtëpi janë të njëpasnjëshme nëse janë pranë njëra-tjetrës qoftë horizontalisht apo vertikalisht. Të gjitha shtëpitë e njëpasnjëshme janë të larguara mes vete njëlloj. Nëse kemi $m \geq 3$ lloje ngjyrash të ndryshme për ndonjë numër natyror m, në sa mënyra mund t'i ngjyrosim shtëpitë ashtu që shtëpitë e njëpasnjëshme ngjyrosen me ngjyra të ndryshme si dhe për çdo katror në rrjetën e shtëpive përdorim së paku 3 ngjyra?

Propozuar nga Besfort Shala, student në Universitetin e Primorskës.

Zgjidhje. Zgjidhim detyrën në përgjithësi duke zëvendësuar 2021 me $n \geq 2$. Supozojmë se i kemi ngjyrosur n rreshtat e parë të shtëpive dhe që këtë mund ta bëjmë në a_n mënyra. Supozojmë se ngjyrat e shtëpive në rreshtin e fundit janë $x \neq y$. Atëherë, shtëpia e majtë në rreshtin $n+1$ nuk mund të jetë e ngjyrosur me x dhe shtëpia e djathtë në rreshtin $n+1$ nuk mund të jetë e ngjyrosur me y.

(2 pikë)

Nëse e ngjyrosim shtëpinë e majtë në rreshtin $n+1$ me ngjyrën y, atëherë shtëpia e djathtë nuk mund të ngjyroset me x apo y (sepse duhen të paktën 3 ngjyra në katror), prandaj kemi $m-2$ mënyra për të ngjyrosur shtëpinë e djathtë.

(2 pikë)

Përndryshe, pra nëse e ngjyrosim shtëpinë e majtë me ngjyrën $z \neq x, y$, atëherë shtëpia e djathtë nuk mund të ngjyroset me y apo z (por mundet me x), prandaj sërish kemi $m-2$ mënyra për të ngjyrosur shtëpinë e djathtë.

(2 pikë)

Kështu,

$$a_{n+1} = a_n\big((m-2) + (m-2)^2\big) = a_n(m-1)(m-2).$$

(2 pikë)

Qartazi, $a_2 = m(m-1)^2(m-2)$, prandaj zgjidhja e përgjithshme është

$$a_n = m(m-1)^n(m-2)^{n-1}.$$

Në rastin tonë, marrim $n = 2021$.

(2 pikë)

4. Le të jenë $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n > 0$ numra realë pozitivë ashtu që $x_1 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. Vërtetoni se

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n + \frac{(x_1 - x_n)^2}{2(x_1^2 + x_n^2)}.$$

Kur vlen barazimi?

Propozuar nga Slobodan Filipovski, PhD, Profesor Asistent në Universitetin e Primorskës.

Zgjidhje. Nga jobarazimi Koshi-Shvarc, kemi

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 = (x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_1}\right) \geq$$
$$\geq \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_n}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_2}} + \cdots + \sqrt{\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}}} + \sqrt{\frac{x_n}{x_1}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_n}} + \sqrt{\frac{x_n}{x_1}} + n - 2\right)^2.$$

(3 pikë)

Kështu, mjafton të tregojmë se

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_n}} + \sqrt{\frac{x_n}{x_1}} \geq 2 + \frac{(x_1 - x_n)^2}{2(x_1^2 + x_n^2)}$$

që është jobarazim ekuivalent me

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_n}} + \sqrt{\frac{x_n}{x_1}} \geq 2 + \frac{\left(\frac{x_1}{x_n} - 1\right)^2}{2\left(\left(\frac{x_1}{x_n}\right)^2 + 1\right)}.$$

(3 pikë)

Zëvendësojmë $t^2 = \frac{x_1}{x_n}$ me $t > 0$ dhe kemi se jobarazimi i fundit është ekuivalent me

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 + \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{2(t^4 + 1)} \Leftrightarrow 2t^6 - 5t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 - 5t + 2 \geq 0.$$

Le të jetë $p(t) = 2t^6 - 5t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 2t^2 - 5t + 2$. Vërehet lehtë se $p(1) = 0$, pastaj $p'(1) = p''(1) = p'''(1) = 0$, prandaj $(t-1)^4$ pjeston $p(t)$. Pastaj, $\frac{p(t)}{(t-1)^4} = 2t^2 + 3t + 2 > 0$, prandaj jobarazimi $p(t) \geq 0$ vlen, çka duhej treguar.

(3 pikë)

Barazimi vlen vetëm nëse $t = 1$, pra $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ dhe për këto vlera vlen barazimi.

(1 pikë)

5. Gjeni të gjitha funksionet $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ të tilla që $f(1) \mid f(m)$ dhe

$$f(mn)f\big(\mathrm{pmmp}(m,n)\big) = \mathrm{pmmp}(m,n)f(m)f(n)$$

për të gjithë numrat natyrorë m, n.

Propozuar nga Besfort Shala, student në Universitetin e Primorskës.

Zgjidhje. Supozojmë së pari se $\gcd(m,n) = 1$. Në këtë rast, fitojmë

$$\frac{f(mn)}{f(1)} = \frac{f(m)}{f(1)} \cdot \frac{f(n)}{f(1)},$$

duke demonstruar se funksioni $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ përkufizuar nga $f(1)g(m) = f(m)$ është multiplikativ. Lehtë tregohet se funksioni g poashtu plotëson ekuacionin e dhënë. Kështu, gjejmë zgjidhjet multiplikative së pari.

(2 pikë)

Pasi g është funksion multiplikativ, $g(1) = 1$ dhe mjafton të përkufizohet funksioni në pikat p^k ku p është numër i thjeshtë dhe k numër natyror. Duke zëvendësuar $m = n = p$, kemi

$$g(p^2)g(p) = pg(p)^2 \Rightarrow g(p^2) = pg(p).$$

Pastaj, $m = p^2, n = p$ jep

$$g(p^3)g(p) = pg(p^2)g(p) = p^2g(p)^2 \Rightarrow g(p^3) = p^2g(p).$$

Me anë të induksionit, $g\left(p^k\right) = p^{k-1}g(p)$ për të gjithë numrat e thjeshtë p dhe k numër natyror.

(3 pikë)

Kjo e thjeshtëzon detyrën edhe më tej, sepse tani mjafton të perkufizohet funksioni g për numrat e thjeshtë p. Tregojmë se në fakt, $g(p)$ mund të përkufizohet lirshëm. Për numrin e thjeshtë p, le të jetë $g(p) = a_p$ ku a_p është ndonjë numër natyror. Le të jenë $m > 1, n > 1$ numra natyrorë ashtu që mund të shkruajmë $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}$ dhe $n = p_1^{\beta_1} \cdots p_l^{\beta_l}$ për numrat e thjeshtë $p_1, \dots, p_l$ ashtu që $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ por $\alpha_i + \beta_i > 0$ për të gjitha vlerat $i = 1, \dots, l$. Duke zëvendësuar këto në ekuacionin fillestar dhe duke shkruar $\min\{\alpha_i, \beta_i\} = m_i$, kemi

$$\left(\prod_{i=1}^{l} p_i^{\alpha_i+\beta_i-1}a_{p_i}\right)\left(\prod_{m_i>0} p_i^{m_i-1}a_{p_i}\right) = \left(\prod_{\alpha_i>0} p_i^{\alpha_i-1}a_{p_i}\right)\left(\prod_{\beta_i>0} p_i^{\beta_i-1}a_{p_i}\right)\left(\prod_{m_i>0} p_i^{m_i}\right).$$

(3 pikë)

Pas shqyrtimeve triviale të fuqive përkatëse të numrave të thjeshtë $p_1, \dots, p_l$ në të dyja anët, vërejmë se të gjitha thjeshtohen dhe kemi $1 = 1$. Pra, ekuacioni fillestar përmbushet pavarësisht vlerës së $g(p)$. Pasi $f(m) = c \cdot g(m)$ poashtu e plotëson ekuacionin fillestar për të gjitha vlerat natyrore të numrit c, përfundojmë se të gjitha zgjidhjet janë të kësaj forme, pra ku g është funksion multiplikativ me $g\left(p^k\right) = p^{k-1}g(p)$. (2 pikë)

Shënim. $g(p) = p - 1$ jep $g(n) = \varphi(n)$ si zgjidhje, ku φ është funksioni i Euler-it.