Kosovo and Albania Mathematical Olympiad

KAMO

Olimpiada e Tretë Matematike Kosovë - Shqipëri për Klasat VII - IX

3 Korrik 2022

Klasa IX - Zgjidhjet

PJESA E PARË - KLASA IX

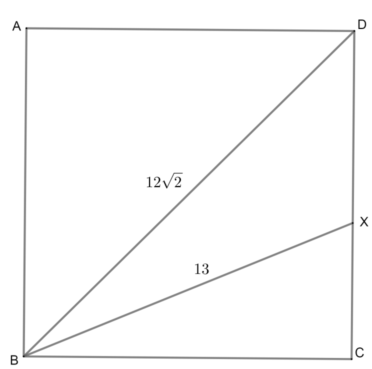
1. Ana dëshiron t'i blejë të paktën 2022 lapsa. Lapsat shiten në pako nga 3 ose nga 5. Duke blerë sa më pak pako, sa është numri më i vogël i lapsave qe mund t'i blejë Ana?

Përgjigja: 2023

2. Sa është shuma e zgjidhjeve të ekuacionit $x^3 - 5x^2 - 14x = 0$?

Përgjigja: 5

3. Le të jetë $ABCD$ katror dhe X një pikë në segmentin CD. Nëse gjatësia e segmentit BD është $12\sqrt{2}$ dhe gjatësia e segmentit BX është 13, gjeni gjatësinë e segmentit DX.



Përgjigja: 7

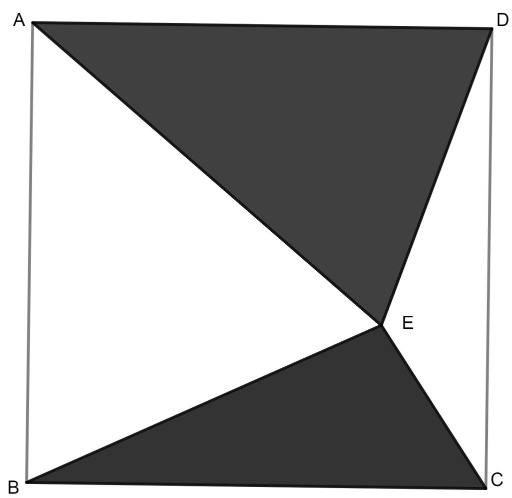
4. Sa numra natyrorë n janë të tillë që

$$\text{shmvp}(n, 2022) + \text{pmmp}(n, 2022) \leq 2028?$$

Sqarim: shmvp(a, b) është shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave natyrorë a dhe b, kurse pmmp(a, b) është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave natyrorë a dhe b.

Përgjigja: 4

5. Le të jetë $ABCD$ katror me gjatësi të brinjës 5 dhe E një pikë brenda katrorit. Gjeni syprinën e sipërfaqes së hijëzuar.



Përgjigja: 12.5

6. Era ka disa fije peri shumë të gjata. Ajo numëron sa fije peri ka dhe e ndan njerën nga fijet në po aq pjesë. Ajo e përsërit këtë hap disa herë derisa t'i arrijë saktësisht 25 fije peri. Varësisht nga numri fillestar i fijeve të perit, sa hapa mund t'i nevojiten Erës më së shumti?

Përgjigja: 4

7. Cili është numri natyror n më i vogël i tillë që $\frac{n}{3}$ është katror i plotë dhe $\frac{n}{2}$ është kub i plotë?

Përgjigja: 432

8. Le të jetë $a > 0$. Nëse jobarazimi $22 < ax < 222$ vlen për saktësisht 10 numra natyrorë x, gjeni sa numra natyrorë x e plotesojnë jobarazimin $222 < ax < 2022$?

Përgjigja: $81, 89, 90, \ldots, 98$ janë të gjitha përgjigje të mundshme.

PJESA E DYTË - KLASA IX

1. Nëse $(2^x + 2^{-x}) - (4^x + 4^{-x}) = 3$, gjeni vlerën numerike të shprehjes

$$8^x + 8^{-x} + 3 \cdot (2^x + 2^{-x}).$$

Zgjidhje. Vërejmë që

$$8^x + 3 \cdot 2^x + 8^{-x} + 3 \cdot 2^{-x} = (2^x)^3 + (2^{-x})^3 + 3(2^x + 2^{-x}).$$

Duke përdorur faktorizimin për shumën e kubeve kemi

$$\begin{aligned}(2^x)^3 + (2^{-x})^3 + 3(2^x + 2^{-x}) &= (2^x + 2^{-x})(2^{2x} - 1 + 2^{-2x}) + 3(2^x + 2^{-x}) \\ &= (2^x + 2^{-x})(4^x + 2 + 4^{-x}).\end{aligned}$$

Nga kushti i problemit kemi $4^x + 4^{-x} + 3 = 2^x + 2^{-x}$. Pra

$$(2^x + 2^{-x})(4^x + 2 + 4^{-x}) = (2^x + 2^{-x})(2^x + 2^{-x} - 1).$$

Rrjedhimisht

$$(2^x + 2^{-x})(2^x + 2^{-x} - 1) = 4^x + 4^{-x} - 2^x - 2^{-x} + 1 + 1 = -1.$$

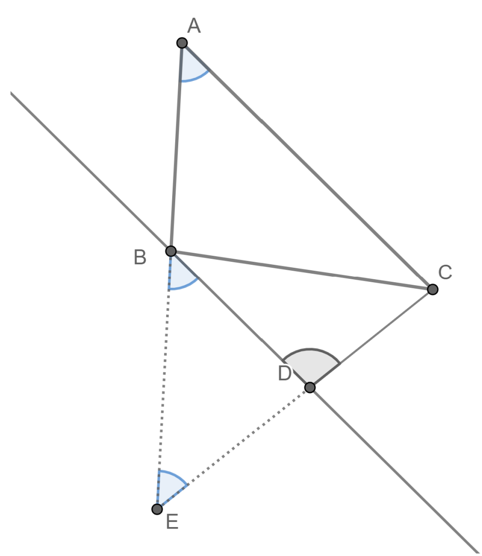
▲

2. Le të jetë ABC një trekëndësh këndngushtë. Në drejtëzën paralele me AC që kalon nepër pikën B, marrim pikën D të tillë që $\angle BDC = 2\angle BAC$ si dhe $ABDC$ është katërkëndësh konveks. Tregoni që shuma e gjatësive të segmenteve BD dhe DC është e barabartë me gjatësinë e segmentit AC.

Zgjidhje. Le të jetë E prerja e AB me CD. Pasi që $AC \parallel BD$, kemi $\angle EBD = \angle EAC = \angle BAC$. Poashtu,

$$\angle BED = \angle BDC - \angle EBD = 2\angle BAC - \angle BAC = \angle BAC,$$

prej nga $AC = EC$ dhe $BD = DE$. Në fund, kemi $AC = CE = CD + DE = CD + BD$, çka duhej treguar. ▲



3. A mund të ndahen numrat $1, 2, \ldots, 28$ në dy bashkësi A dhe B në menyrë që $A \cap B = \varnothing$, si dhe të vlejnë kushtet e mëposhtme njëkohësisht:

(i) numri i numrave tek në bashkësinë A është i njejtë me numrin e numrave tek në bashkësinë B;

(ii) ndryshimi mes shumës së katrorëve të numrave në bashkësinë A dhe shumës së katrorëve në bashkësinë B është 16?

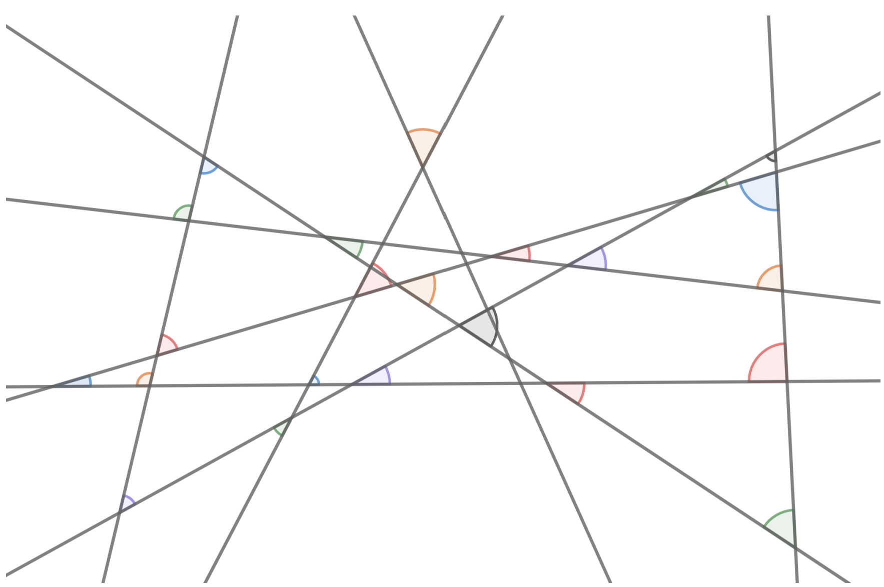
Zgjidhje. Tregojmë se përgjigja është jo. Vërejmë se nëse numri natyror x plotpjesëtohet me 4, atëherë x^2 plotpjesëtohet me 8. Përndryshe, nëse x është çift por nuk plotpjesëtohet me 4, atëherë x^2 ka mbetjen 4 kur pjestohet me 8.

Supozojmë se ekzistojnë bashkësitë A dhe B sipas kushteve të detyrës. Le të jetë a_1 numri i numrave në bashkësinë A të cilët plotpjesëtohen me 4, a_2 numri i numrave çift në bashkësinë A të cilët nuk plotpjesëtohen me 4 dhe a_3 numri i numrave tek në bashkësinë A. Ngjashëm përkufizojmë b_1, b_2, b_3 për bashkësinë B. Nga kushti i parë i detyrës, kemi $a_3 = b_3$. Nëse ndryshimi i shumës së katrorëve të numrave në bashkësinë A dhe shumës së katrorëve në bashkësinë B është 16, atëherë ndryshimi plotpjesëtohet me 8 në veçanti. Mbetja e këtij ndryshimi pas pjesëtimit me 8 është

$$(0 \cdot a_1 - 0 \cdot b_1) + 4(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) = 4(a_2 - b_2),$$

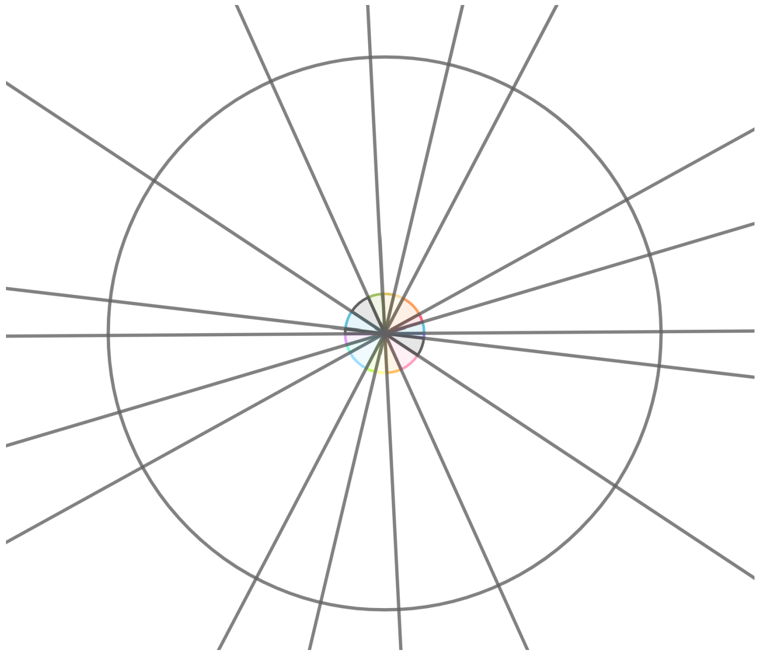
ku në hapin e fundit kemi përdorur $a_3 = b_3$. Nëse mbetja është 0, kemi që a_2 dhe b_2 kanë mbetjen e njejtë kur pjesëtohen me 2, pra janë të dyja çift apo të dyja tek. Por $a_2 + b_2 = 28/4 = 7$ është tek, që është e pamundur. ▲

4. Janë dhënë $n > 9$ drejtëza të tilla që çdo dy drejtëza nuk janë paralele. Tregoni se ekzistojnë së paku $\dfrac{n}{9}$ drejtëza që këndet që formojnë mes vete i kanë më së shumti $20°$.

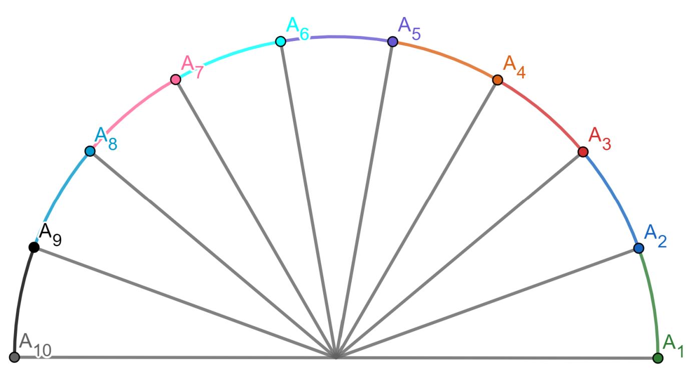


Zgjidhje. Vërejmë se nëse $\ell \parallel \ell'$ dhe $h \parallel h'$ atëherë këndi që formohet mes ℓ dhe h është i barabartë me këndin që formohet mes ℓ' dhe h'.

Pra nëse kemi n drejtëza $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ definojmë n drejteza të tjera $\ell'_1, \ell'_2, \ldots, \ell'_n$ të tilla që $\ell'_i \parallel \ell_i$ dhe ℓ'_i kalon nëpër origjinë. Mjafton të tregojmë që ekzistojnë $\frac{n}{9}$ drejtëza nga $\{\ell'_1, \ell'_2, ..., \ell'_n\}$ që mes vete formojnë kënde më të vogla se $20°$.



Marrim një rreth me qendër në origjinë dhe rreze 1 dhe konsiderojmë një gjysëmrreth të tij S. Ndajmë perimetrin e S në 9 sektorë të barabartë (secili $20°$) si në vijim. Le të jetë S_i sektori A_iA_{i+1} ku vendosim $A_i \in S_i$ dhe $A_{i+1} \notin S_i$ për $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.



Çdo drejtëz që kalon nëpër origjinën e rrethit, takohet me saktësisht njërin nga këta sektorë. Nga parimi i Dirileut (angl. pigeonhole principle) kemi se ekziston një sektor i cili takohet nga së paku $\frac{n}{9}$ drejtëza. Pasi sektori ka kënd qëndror me madhësi $20°$, kemi se ekzistojnë së paku $\frac{n}{9}$ drejtëza që mes vete formojnë kënde më të vogla se $20°$, çka duhej treguar. ▲