Kosovo and Albania Mathematical Olympiad

KAMO

Olimpiada e Tretë Matematike Kosovë - Shqipëri për Klasat VII - IX

3 Korrik 2022

Klasat VII - VIII - Zgjidhjet

PJESA E PARË - KLASAT VII - VIII

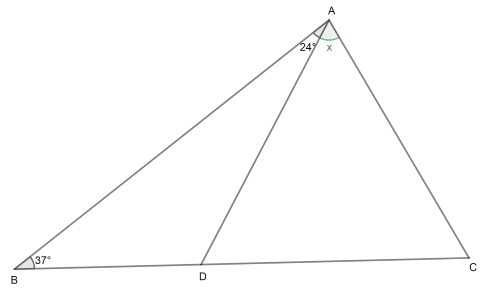
1. Gjeni vlerën numerike të shprehjes $2022^2 - 2012^2$.

Përgjigja: 40340

2. Në sa mënyra mund të shkruhet numri 21 si shumë e dy apo më shumë numrave natyrorë të njëpasnjëshëm?

Përgjigja: 3

3. Le të jetë ABC trekëndësh dhe D pikë në segmentin BC e tillë që segmentet AD dhe AC kanë gjatësinë e njejtë. Nëse masa e këndit $\angle ABC$ është $37°$ dhe masa e këndit $\angle BAD$ është $24°$, gjeni masën e këndit $\angle DAC$.

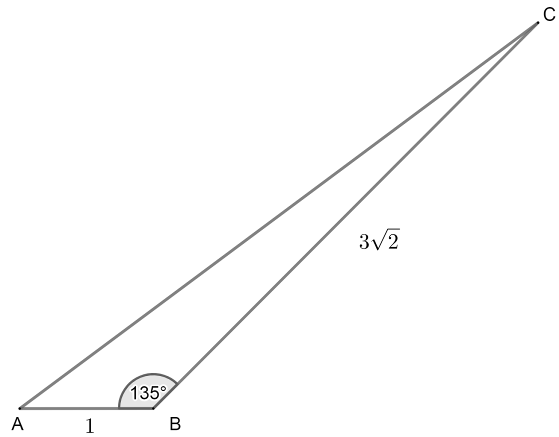


Përgjigja: $58°$

4. Janë dhënë numrat natyrorë a, b, c të tillë që $a + b = 36, b + c = 18, c + a = 24$. Gjeni vlerën e numrit b.

Përgjigja: 15

5. Le të jetë ABC një trekëndësh i tillë që këndi $\angle ABC = 135°$, gjatësia e segmentit AB është 1 dhe gjatësia e segmentit BC është $3\sqrt{2}$. Gjeni gjatësinë e segmentit AC.



Përgjigja: 5

6. Sa numra treshifrorë janë të tillë që shifrat i kanë numra të thjeshtë, si dhe cilatdo dy shifra të njëpasnjëshme apo fqinje brenda numrit poashtu formojnë numra të thjeshtë?

Përgjigja: 4

7. Një kopshtar mbjell disa lule në rreshta. Në rreshtin e parë ai mbjell 9 lule. Në secilin rresht vijues, ai mbjell 4 lule më shumë se në rreshtin paraprak. Nëse në rreshtin e fundit janë mbjellur 89 lule, atëherë sa rreshta lulesh mbolli kopshtari?

Përgjigja: 21

8. Në sa mënyra mund të ndahen 4 molla, 4 dardha dhe 4 portokaj në dy shporta me nga 6 fruta?

Përgjigja: 19

PJESA E DYTË - KLASAT VII - VIII

1. Gjeni të gjitha dyshet e numrave te plotë (m, n) të tilla që

$$m + n = 3(mn + 10).$$

Zgjidhje. Tregojmë që dyshet e vetme me këtë veti janë $(0, 30)$ dhe $(30, 0)$. Vërejmë që

$$m + n = 3(mn + 10) \iff 3mn - m - n = -30.$$

Shumëzojmë të dyja anët e barazimit me 3 dhe fakorizojmë si në vijim

$$9mn - 3m - 3n + 1 - 1 = -90 \iff (3m - 1)(3n - 1) = -89.$$

Pasi 89 është numër i thjeshtë, kemi katër raste që duhet shqyrtuar:

(i) $3m - 1 = -1$ dhe $3n - 1 = 89$. Në këtë rast kemi $m = 0$ dhe $n = 30$.

(ii) $3m - 1 = 89$ dhe $3n - 1 = -1$. Në këtë rast kemi $m = 30$ dhe $n = 0$.

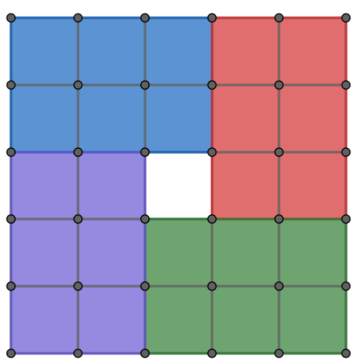
(iii) $3m - 1 = 1$ dhe $3n - 1 = -89$. Në këtë rast nuk kemi zgjidhje të plota.

(iv) $3m - 1 = -89$ dhe $3n - 1 = 1$. Në këtë rast nuk kemi zgjidhje të plota.

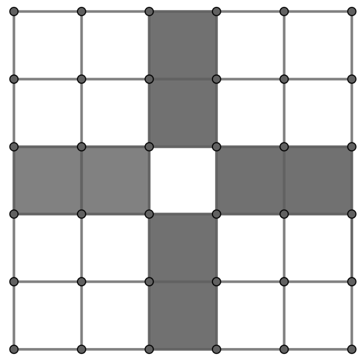
Pra dyshet e vetme të plota (m, n) janë $(0, 30)$ dhe $(30, 0)$. ▲

2. Është dhënë një tabelë katrore me $5 \times 5 = 25$ katrorë njësi. Sa është numri më i vogël i katrorëve njësi që duhet ngjyrosur, në menyrë që çdo drejtkëndësh me dimensione 2×3 apo 3×2 brenda tabelës të ketë të paktën 2 katrorë njësi të ngjyrosur?

Zgjidhje. Janë të nevojshme të paktën 8 katrorë njësi të ngjyrosur, pasi ekzistojnë 4 drejtkëndësha me dimensione 2×3 apo 3×2 që nuk priten (shih figurën), dhe për secilin prej tyre duhen të paktën 2 katrorë njësi të ngjyrosur.



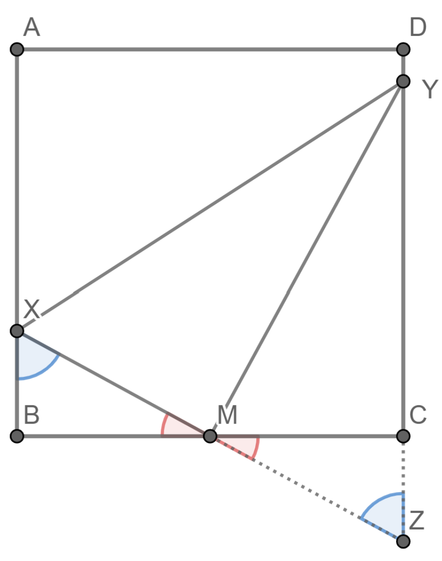
Tutje, është e mundur të ketë 8 katrorë njësi të ngjyrosur (shih figurën) ashtu që plotësohet kushti i detyrës.



Prandaj, përfundojmë se përgjigja është 8. ▲

3. Le të jetë $ABCD$ një katror dhe pika M mesi i segmentit BC. Le të jenë X dhe Y pika në segmentet AB dhe CD. Vërtetoni që nëse këndi $\angle XMY = 90^\circ$, atëherë shuma e gjatësive të segmenteve BX dhe CY është e barabartë me gjatësinë e segmentit XY.

Zgjidhje 1. Shënojmë me Z pikëprerjen e drejtëzave XM dhe CD. Pasi që $XB \parallel YC$, kemi që $\angle BXM = \angle MZC$. Poashtu $\angle XMB = \angle ZMC$. Pra, mund të përfundojmë që $\triangle XBM \sim \triangle ZCM$. Tutje, nga $BM = MC$ rrjedh që $\triangle XBM \cong \triangle ZCM$, prej nga $XM = MZ$ dhe $XB = CZ$. Tani, kemi që XM është simetralja e brinjës XZ, prandaj $XY = YZ$ dhe kështu kemi $XY = YZ = YC + CZ = CY + BX$. ▲



Zgjidhje 2. Kemi $\angle MYC = 90^\circ - YMC = \angle XMB$ dhe $\angle XBM = 90^\circ = \angle MCY$, prej nga $\triangle YMC \sim \triangle XMB$. Kështu, kemi $\frac{YC}{MC} = \frac{MB}{BX}$, dhe rrjedhimisht $MB^2 = MC^2 = BX \cdot YC$. Nga Teorema e Pitagorës, kemi

$$XY^2 = XM^2 + MY^2 = XB^2 + BM^2 + MC^2 + YC^2 =$$

$$= BX^2 + 2MB^2 + YC^2 = BX^2 + 2BX \cdot YC + YC^2 = (BX + CY)^2,$$

prej nga rrjedh rezultati i dëshiruar. ▲

Zgjidhje 3. Le të jetë N mesi i segmentit XY. Vërejmë se MN është vija e mesme e trapezit $BXYC$, prandaj $MN = \frac{BX+CY}{2}$. Poashtu, dihet se mediana mbi hipotenuzë është sa gjysma e hipotenuzës, prandaj $MN = \frac{XY}{2}$. Tani, kemi $\frac{BX+CY}{2} = MN = \frac{XY}{2}$, prej nga rrjedh rezultati i dëshiruar. ▲

4. Le të jetë A bashkësia e numrave natyrorë n të tillë që distanca e numrit real $n\sqrt{2022} - \dfrac{1}{3}$ nga numri i plotë më i afërt është më së shumti $\dfrac{1}{2022}$. Tregoni se ekuacioni

$$20x + 21y = 22z$$

nuk ka zgjidhje në bashkësinë A.

Zgjidhje. Supozojmë se ekzistojnë $x, y, z \in A$ ashtu që

$$20x + 21y = 22z.$$

Shumëzojmë ekuacionin me $\sqrt{2022}$ dhe e rishkruajmë atë për të inkuadruar shprehjen $n\sqrt{2022} - 1/3$ nga detyra:

$$20\left(x\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right) + 21\left(y\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right) + \frac{20+21}{3} = 22\left(z\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right) + \frac{22}{3}.$$

Pas thjeshtimit të mëtutjeshëm, kemi

$$20\left(x\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right) + 21\left(y\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right) + 6 + \frac{1}{3} = 22\left(z\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right). \qquad (1)$$

Tani, konsiderojmë pjesën decimale (pas presjes dhjetore) të të dyja anëve të barazimit (1). Pasi çdo $n \in A$ plotëson kushtin se numri real $n\sqrt{2022} - 1/3$ është larg një numri të plotë për më së shumti $1/2022 < 1/1000$, kemi se pjesa decimale e numrit $n\sqrt{2022} - 1/3$ është ose më e vogël se 0.001, ose më e madhe se 0.999.

Përkufizojmë $X = 20\left(x\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right), Y = 21\left(y\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right), Z = 22\left(z\sqrt{2022} - \frac{1}{3}\right)$. Shkruajmë me $p(t)$ pjesen decimale të numrit t. Rrjedhimisht $p(X)$ është ose më së shumti 0.020 ose të paktën $1 - 0.020 = 0.980$. Ngjashëm, kemi se $p(Y)$ është në intervalet $[0, 0.021] \cup [1 - 0.021, 1]$, dhe $p(Z)$ është në intervalet $[0, 0.022] \cup [1 - 0.022, 1]$.

Vërejmë se pjesa decimale e $X+Y$ është e njejtë me pjesën decimale të shumës së pjesëve decimale të X dhe Y, pra $p(X+Y)=p(p(X)+p(Y))$. Nga kjo vërejmë se $p(X+Y)$ është në intervalet

$$[0, 0.021+0.022] \cup [1-0.021-0.022, 1] = [0, 0.043] \cup [0.957, 1].$$

Kjo do të thotë se pjesa decimale e anës së majtë të ekuacionit (1) (përkatësisht pjesa decimale e $X+Y+6+\frac{1}{3}$) është brenda intervalit $[\frac{1}{3}-0.043, \frac{1}{3}+0.043]$. Mirëpo, ana e djathtë e (1) është $p(Z) \in [0, 0.022] \cup [0.978, 1]$. Pra, shohim se është e pamundur që ekuacioni (1) të vlejë.

Përfundojmë se ekuacioni i dhënë nuk ka zgjidhje në bashkësinë A. ▲