Testi Përzgjedhës për EGMO 2024
Zgjidhjet dhe Skemat e Vlerësimit

P1

Janë dhënë dy grumbuj me nga 1012 gurë. Ana dhe Beni luajnë një lojë. Në çdo lëvizje, lojtari që luan largon dy gurë nga njëri grumbull dhe e shton një gur te grumbulli tjetër. Ana fillon e para. Lojtari i parë që e largon gurin e fundit nga njëri prej grumbujve e fiton lojën. Cili lojtar ka strategji fituese dhe pse?

Zgjidhje. Strategji fituese ka Beni. Për ta fituar lojën, Beni mund të luajë në këtë mënyrë: Fillimisht, kur Ana i largon dy gurë nga njëri prej grumbujve, Beni në rradhën e tij i largon dy gurë nga grumbulli tjetër. Në këtë mënyrë, pas një lëvizje të Anës dhe një lëvizje të Benit, numri i gurëve në të dy grumbujt zvogëlohet për një. Duke vazhduar këtë strategji, Beni do të sjellë lojën në situatën ku në të dy grumbujt do të ketë nga 4 gurë dhe radhën për të luajtur do ta ketë Ana. Prej këtu Beni e fiton lojën duke larguar 2 gurët e fundit në grumbullin në të cilin paraprakisht Ana i ka larguar 2 gurë. ▲

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Pohimi se lojën e fiton Beni pa dhënë ndonjë argument që mund të dërgojë në zgjidhje të plotë **(0p)**

(A) – aditive mes vete

(A1) Përfundimi se strategjia që Beni të largojë gurët në grumbullin tjetër me atë që paraprakisht ka zgjedhur Ana për të larguar 2 gurë do të shpie në situaten ku numri i gurëve në të dy grumbujt do të zvogëlohet për një .... **(6p)**

(A2) Arsyetimi se strategjinë e fitores e ka Beni duke e përdorur strategjinë e mësipërme .... **(4p)**

(B) Pikë të pjesshme (jo-aditive mes vete)

(B1) Zgjidhja e problemit ku grumbujt janë me nga 4 gurë .... **(1p)**

(B2) Konsiderimi i shembujve të lojëve për ndonjë numër të gurëve të paktën 5, të cilat sugjerojnë një strategji fituese për Benin .... **(2p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi tjetër i saktë vlerësohet me të gjitha pikët .... **(10p)**

(K2) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje .... **(-1p)**

P2

Le të jetë n numër natyror dhe le të jetë dhënë polinomi $P(x) = x^n + n$.

(a) A është e mundur që për ndonjë numër tek n, polinomi $P(x)$ të jetë numër i përbërë për çdo numër natyror x?

(b) A është e mundur që për ndonjë numër çift n, polinomi $P(x)$ të jetë numër i përbërë për çdo numër natyror x?

Arsyetoni përgjigjet tuaja.

Zgjidhje.

(a) Po: marrim $n = 27$ dhe faktorizojmë polinomin

$$P(x) = x^{27} + 27 = (x^9)^3 + 3^3 = (x^9 + 3)(x^{18} - 3x^9 + 9).$$

Qartazi kemi $x^9 + 3 > 1$ dhe $x^{81} - 3x^9 + 9 = x^9(x^{72} - 3) + 9 \geq 7 > 1$ për çdo $x \geq 1$, prandaj $P(x)$ është numër i përbërë për çdo numër natyror x.

(b) Po: marrim $n = 64$ dhe faktorizojmë polinomin

$$P(x) = x^{64} + 64 = (x^{16})^4 + 4 \cdot 2^4 = (x^{32} - 4x^{16} + 8)(x^{32} + 4x^{16} + 8).$$

Qartazi kemi $x^{32} + 4x^{16} + 8 > 1$ dhe $x^{32} - 4x^{16} + 8 = x^{16}(x^{16} - 4) + 8 \geq 5 > 1$ për $x \geq 1$, prandaj $P(x)$ është numër i përbërë për çdo numër natyror x. ▲

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Zëvendësimi i disa vlerave numerike jo të përshtatshme për x apo n dhe nxjerrja e përfundimeve nga kjo .... **(0p)**

(A) Pikë të pjesshme – jo-aditive mes vete

Pika (A1) nuk është aditive me asnjë pikë tjeter. Pika (A2) mund të fitohet në të dy pjesët (a) dhe (b), dhe është aditive me (B1), (B1.1), ose (B2), (B2.1), por jo me të dyja.

(A1) Konsiderimi i faktorizimit të polinomit në cilindo rast (n tek apo çift), apo vërtetimi se polinomi $P(x)$ ka të paktën dy pjesëtues të thjeshtë të fiksuar për pafundësisht vlera të x .... **(1p)**

(A2) Faktorizimi i $P(x)$ në dy faktorë ku njëri nga faktorët është 1 për ndonjë vlerë të x .... **(2+2p)**

(B) Zgjidhje (pothuajse) e plotë

(B1) Zgjidhja e plotë e pjesës (a) .... **(5p)**

Pikë të pjesshme:

(B1.1) Faktorizimi i $P(x)$ në dy faktorë për ndonjë vlerë të saktë të n, pa arsyetuar se ata janë më të mëdhenj se 1 .... **(4p)**

(B2) Zgjidhja e plotë e pjesës (b) .... **(5p)**

Pikë të pjesshme:

(B2.1) Faktorizimi i $P(x)$ në dy faktorë për ndonjë vlerë të saktë të n, pa arsyetuar se ata janë më të mëdhenj se 1 .... **(4p)**

Komente të përgjithshme

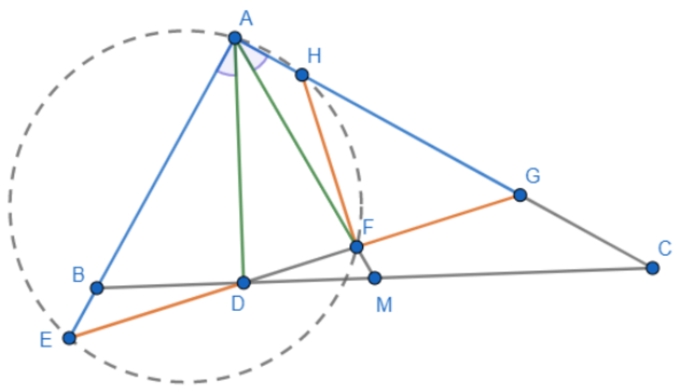
(K1) Çfarëdo arsyetimi tjetër i saktë vlerësohet me të gjitha pikët . . . . **(10p)**

(K5) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje . . . . **(-1p)**

P3

Le të jetë $\triangle ABC$ trekëndësh kënddrejt te kulmi A i tillë që brinja AB është më e shkurtër se brinja AC. Le të jetë D këmbëza e lartësisë prej A në BC dhe M mesi i BC. Le të jetë E një pikë ne gjysmëdrejtëzën AB, jashtë segmentit AB. Drejtëza ED pret segmentin AM ne pikën F. Pika H është në brinjën AC e tillë që $\angle EFH = 90°$. Supozojmë që $ED = FH$. Gjeni masën e këndit $\angle AED$.

Zgjidhje. Dihet se $MA = MB = MC$, prandaj $\angle MAC = \angle MCA = 90° - \angle ABC = \angle BAD$. Marrim pikën $G \neq H$ në AC të tillë që $FH = FG$. Pasi që $\angle EAH + \angle EFH = 90° + 90° = 180°$, kemi që $EAHF$ ciklik, prandaj $\angle AED = \angle FHG = \angle FGH$. Së bashku këto na japin që $\angle EAD = \angle GAF$, $\angle AED = \angle AGF$, prej nga $\triangle AED \sim \triangle AGF$, por pasi që $ED = HF = GF$ kemi $\triangle AED \cong \triangle AGF$. Tani tregojmë që E, D, F dhe G janë kolineare. Nga kongruenca e mësipërme kemi $AD = AF$. Poashtu $\angle AFD = \angle ADF = \angle EAD + \angle AED = \angle GAF + \angle AGF = 180° - \angle AFG$, prandaj E, D, F dhe G janë kolineare. Nga kongruenca kemi që $AE = AG$ dhe $\angle EAD = 90°$, prandaj $\angle AED = 45°$. ▲



Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Pohimi që $\angle AED = 45°$, por pa vërtetim .... **(0p)**

(Z2) Përmendja që $EAHF$ është ciklik .... **(0p)**

(A) – aditive mes vete

(A1) Përkufizimi i pikës G .... **(3p)**

(A2) Vërtetimi që $\triangle ADE \cong \triangle AFG$ .... **(4p)**

(A3) Vërtetimi që E, D, F dhe G janë kolineare .... **(2p)**

(A4) Përfundimi duke llogaritur këndin .... **(1p)**

(B) Pikë të pjesshme

(B1) Vërtetimi që $AF = AD$. .... **(1p)**

Pika $(B1)$ mund të fitohet vetëm nëse anjëra nga pikat (A2), (A3) dhe (A4) nuk janë fituar.

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi tjetër i saktë vlerësohet me të gjitha pikët .... **(10p)**

(K2) Diagrami i detyrës .... **(0p)**

(K3) Rezultatet tjera që nuk lidhen me zgjidhjen .... **(0p)**

(K4) Nuk zbriten pikët për problemet me konfiguracione.

(K5) Arsyetimet nuk mund të nxirren nga vizatimet.

(K6) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje .... **(-1p)**

P4

Gjeni të gjithë numrat natyrorë m dhe n ashtu që $|4^m - 7^n|$ është numër i thjeshtë.

Zgjidhje. Nëse marrim sipas modulit 3 kemi që $|4^m - 7^n| \equiv 0 \pmod 3$. Meqë shprehja është numër i thjeshtë kemi se është e barabartë me 3. Prandaj $4^m - 7^n = 3$ ose $4^m - 7^n = -3$.

Rasti 1. $4^m - 7^n = 3$: Sipas modulit 4 kemi se $-1 \equiv 3 \pmod 4 \equiv 4^m - 7^n \pmod 4 \equiv -(-1)^n \pmod 4$, prandaj n është numër çift. Andaj ekziston numri natyror k i tillë që $n = 2k$. Prandaj, kemi

$$4^m - 7^n = 3 \Rightarrow (2^m)^2 - (7^k)^2 = 3 \Rightarrow (2^m - 7^k)(2^m + 7^k) = 3.$$

Kjo është e mundur vetëm kur $2^m - 7^k = 1$ dhe $2^m + 7^k = 3$, që qartazi nuk është e mundur sepse $3 = 2^m + 7^k \geq 9$.

Rasti 2. $4^m - 7^n = -3$: Nëse $m = 1$ atëherë qartazi $n = 1$. Nëse $m \geq 2$ duke marr sipas modulit 8 kemi që

$$-3 = 4^m - 7^n \equiv -(-1)^n \pmod 8 \equiv -1, 1 \pmod 8,$$

që është e pamundur. Prandaj e vetmja dyshe që e plotëson kushtin e detyrës është $(m, n) = (1, 1)$. ▲

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Pohimi që $(m, n) = (1, 1)$, por pa vërtetim .... **(0p)**

(Z2) Llogaritje për raste të ndryshme........ **(0p)**

(A) – aditive mes vete

(A1) Shprehja plotëpjestohet me 3 .... **(1p)**

(A2) Vërtetimi se shprehja është e barabartë me 3 ose -3 .... **(1p)**

(A3) Vërtetimi që n është çift tek rasti 1 .... **(2p)**

(A4) Vërtetimi që nuk ekzistojnë zgjidhje për rastin 1 nga relacioni $(2^m - 7^k)(2^m + 7^k) = 3$ .... **(2p)**

(A5) Vërtetimi se zgjidhja e vetme në rastin 2, rrjedhimisht zgjidhja e vetme e ekuacionit është $(1, 1)$ **(4p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi tjetër i saktë vlerësohet me të gjitha pikët .... **(10p)**

(K2) Rezultatet tjera që nuk lidhen me zgjidhjen .... **(0p)**

(K3) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje .... **(-1p)**