Testi Përzgjedhës për IMO 2024
Zgjidhjet dhe Skemat e Vlerësimit

P1

Gjeni të gjithë numrat e thjeshtë p dhe q të tillë që $p^q + 5q - 2$ është numër i thjeshtë.

Zgjidhje. Nëse p dhe q janë numra të thjeshtë tek atëherë $p^q + 5q - 2$ është numër çift dhe më i madh se 2 (sepse $3^3 + 5 \cdot 3 - 2 > 2$), prandaj nuk mund të jetë numër i thjeshtë. Nga kjo kemi se $p = 2$ ose $q = 2$. Nëse $p = 2$, nga teorema e vogël e Fermës kemi që $2^q + 5q - 2$ plotpjesëtohet me q, prandaj nuk mund të jetë numër i thjeshtë pasi qartazi $2^q + 5q - 2 > q$. Nëse $q = 2$, kemi se $p^2 + 8$ duhet të jetë numër i thjeshtë. Vërejmë se p duhet të jetë tek dhe $p^2 + 8$ gjithmonë plotpjesëtohet me 3 dhe është më i madh se 3 nëse $p > 3$ pasi $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Nga kjo kemi se $p = 3$, që është zgjidhje pasi $9 + 8 = 17$ është numër i thjeshtë. ▲

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) Konstatimi se $p = 3, q = 2$ është zgjidhja e vetme ...... **(0p)**

(A) – aditive mes vete, përveç (A2') dhe (A3')

(A1) Shqyrtimi i rastit kur p dhe q janë tek ...... **(1p)**

(A2) Vërtetimi se $2^q + 5q - 2$ plotpjesëtohet me q ...... **(5p)**

Pikë e pjesshme:

(A2') Vërtetimi se $2^q + 5q - 2$ nuk është i thjeshtë për pafundësisht shumë vlera të q ...... **(1p)**

(A3) Vërtetimi se $p^2 + 8$ plotpjesëtohet me 3 nëse $p > 3$ **(4p)**

Pikë e pjesshme:

(A3') Vërtetimi se $p^2 + 8$ nuk është i thjeshtë për pafundësisht shumë vlera të p ...... **(1p)**

Komente të përgjithshme

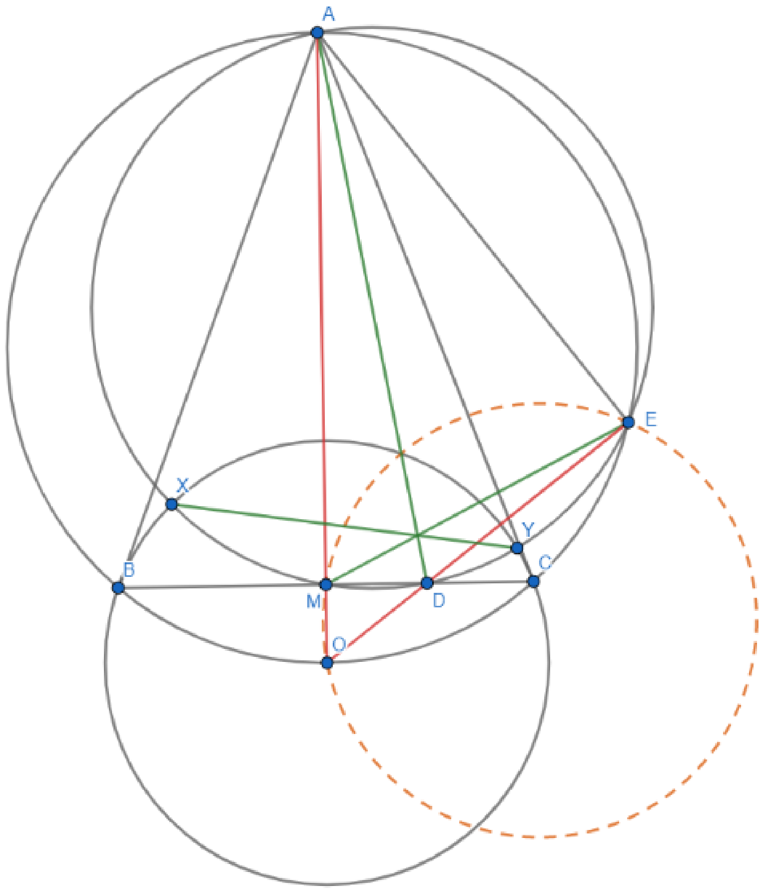
(K1) Çfarëdo zgjidhje tjetër e saktë vlerësohet me të gjitha pikët ...... **(10p)**

(K2) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje ...... **(-1p)**

P2

Le të jetë ω një rreth dhe A një pikë jashtë tij. Tangjentet nga pika A ndaj rrethit ω priten me rrethin në pikat B dhe C. Le të jetë M mesi i segmentit BC dhe le të jetë D një pikë në segmentin BC e ndryshme nga M. Rrethi me diametër AD pret ω në pikat X dhe Y, si dhe rrethin e jashtë shkruar të $\triangle ABC$ përsëri në pikën E. Vërtetoni se drejtëzat AD, EM dhe XY priten në një pikë.

Zgjidhje.



Le të jetë O qendra e rrethit ω. Pasi PA dhe PB janë tangjente ndaj ω, kemi se $\angle OBA = \angle OCA = 90°$, prandaj $ABOC$ është ciklik me diametër AO. Qartazi $AB = AC$, kemi që $\angle AMD = 90°$, prandaj M i përket rrethit me diametër AD. Pasi AD është diametri i (ADE) dhe AO diametri i (ABC), kemi që $\angle AED = \angle AEO = 90°$ prandaj E, D, dhe O janë kolineare.

Vërejmë se $\text{Pow}_{(EMO)}(D) = DE \cdot DO = \text{Pow}_{(ABC)}(D) = DC \cdot DB = \text{Pow}_{\omega}(D)$, prandaj D gjendet në boshtin radikal të rrathëve (EMO) dhe ω.

Pasi që $\triangle ABO$ është kënddrejt te kulmi B dhe BM është lartësia prej B në AO,nga Teorema e Euklidit për Trekëndëshat Kënddrejt kemi që $AB^2 = AM \cdot AO$.

Poashtu, kemi se $\text{Pow}_{(EMO)}(A) = AM \cdot AO = AB^2 = \text{Pow}_{\omega}(A)$, prandaj A gjendet në boshtin radikal të rrathëve (EMO) dhe ω. Duuke i kombinuar rezultatet e mësipërme kemi që AD është boshti radikal i rrathëve (EMO) dhe ω. Tani, nga Teorema e Boshteve Radikale në rrathët (AED), (EMO) dhe ω, del se EM, XY, dhe AD priten në një pikë. ▲

Skema e vlerësimit

(Z) Zero pikë

(Z1) AE, XY dhe BC priten në një pikë S .... **(0p)**

(A) – aditive mes vete

(A1) E, D dhe O kolineare .... **(2p)**

(A2) Vërtetimi që D gjendet në boshtin radikal të ω dhe (EMO) .... **(2p)**

(A3) Vërtetimi që A gjendet në boshtin radikal të ω dhe (EMO) .... **(3p)**

(A4) Përfundimi që AD, EM dhe XY priten në një pikë me anë të Teoremës së boshteve radikale ... **(3p)**

(B) Pikë të pjesshme - joaditive mes vete

(B1) (AE, XY dhe BC priten në pikën S dhe $OS \cap AD = P$.) Vëretimi që $AMPS$ ciklik .... **(2p)**

(B2) (AE, XY dhe BC priten në pikën S dhe ω dhe (EMO) priten në pikat Z dhe W) Vërtetimi që $\angle OZS = \angle OWS = 90°$ .... **(1p)**

Pikat $(B1)$ dhe $(B2)$ mund të fitohet vetëm nëse pika (A3) nuk është fituar.

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi tjetër i analog dhe i saktë për cilëndo prej pikave të skemës vlerësohet me pikë të njejta sikur në skemë..........

(K2) Diagrami i detyrës .... **(0p)**

(K3) Rezultatet tjera që nuk lidhen me zgjidhjen .... **(0p)**

(K4) Nuk zbriten pikët për problemet me konfiguracione.

(K5) Arsyetimet nuk mund të nxirren nga vizatimet.

(K6) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje .... **(-1p)**

(K7) Zgjidhjet jo të plota me metoda analitike/trigonometrike .... **(0p)**

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo arsyetimi tjetër i saktë vlerësohet me të gjitha pikët .... **(10p)**

(K5) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje .... **(-1p)**

P3

Gjeni të gjitha funksionet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ të tilla që

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=2y(f(x)-f(y)-1)$$

për çdo $x, y \in \mathbb{R}$.

Zgjidhje. Duke marrur $x = y = 1$ fitojmë $f(0) = 1$. Duke marrur $y = -x$ fitojmë

$$2x=-2x(f(x)-f(-x)-1),$$

pra f është çift. Marrim $g(x) = f(x) - 1$ për voli dhe kemi se $g(0) = 0$, g është çift dhe

$$(x-y)g(x+y)-(x+y)g(x-y)=2y(g(x)-g(y)). \tag{1}$$

Tani ia ndërrojmë vendet x dhe y prej nga fitojmë

$$-(x-y)g(x+y)-(x+y)g(x-y)=-2x(g(x)-g(y)) \tag{2}$$

duke shfrytëzuar faktin se g është çift. Shumëzojmë (1) me x dhe (2) me y, dhe pas mbledhjes së këtyre relacioneve fitojmë se

$$g(x+y)(x(x-y)-y(x-y))-g(x-y)(x(x+y)+y(x+y))=0$$

për çdo $x, y \in \mathbb{R}$. Këtë e rishkruajmë si

$$g(x+y)(x-y)^2-g(x-y)(x+y)^2=0.$$

Nga këtu lehtë fitohet se $g(x) = cx^2$ për ndonjë konstantë $c \in \mathbb{R}$ (duke e rishkruar relacionin si $g(u)v^2 - g(v)u^2 = 0$ prej nga $g(u)/u^2$ është funksion konstant për $u \neq 0$ por dihet se $g(0) = 0$), që do të thotë se $f(x) = cx^2 + 1$. Një llogaritje e thjeshtë verifikon se të gjitha këto funksione janë zgjidhje. ▲

Skema e vlerësimit

Vlerësimi = max{(A), (B)}

(Z) Zero pikë

(Z1) Konsiderimi i funksioneve ndihmëse $g(x) = f(x) - 1, f(x) = xg(x) + 1, f(x) = g(x^2) + 1$, etj. . . . **(0p)**

(Z2) Konsiderimi i injektivitetit ose surjektivitetit të funksionit . . . . **(0p)**

(Z3) Vërtetimi se $f(x) = 1$ është zgjidhja e vetme lineare . . . . **(0p)**

(A) – pikë të pjesshme (jo-aditive mes vete)

(A1) $f(0) = 1$ . . . . **(1p)**

(A2) f është çift . . . . **(2p)**

(A3) f është çift dhe shfrytëzimi i çiftësisë dhe "anti-simetrisë" mes x dhe y për të fituar relacione të reja (p.sh. duke ia ndërruar vendet x dhe y) dhe kombinimi linear i tyre, por pa përfundim të qartë . **(3p)**

(B) – zgjidhje (pothuajse) e plotë (aditive mes vete)

(B1) Vërtetimi se $(f(x+y)-1)(x-y)^2-(f(x-y)-1)(x+y)^2=0$ për çdo $x,y \in \mathbb{R}$ .... **(7p)**

(B2) Përfundimi se $(f(u)-1)v^2-(f(v)-1)u^2=0$ për çdo $u,v \in \mathbb{R}$ dhe që $(f(x)-1)/x^2$ është konstant për $x \neq 0$ .... **(2p)**

(B3) Arsyetimi se $f(x)=cx^2+1$ është zgjidhje për çdo $c \in \mathbb{R}$ .... **(1p)**

Shënim: (B3) *mund të fitohet vetëm nëse janë fituar* (B1) *dhe* (B2).

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo zgjidhje tjetër e saktë vlerësohet me të gjitha pikët .... **(10p)**

(K2) Pakujdesia me pjestimin me x për $x=0$ pasi është gjetur $f(0)=1$ nuk ndëshkohet .... **(-0p)**

(K3) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje (përveç (K2)) .... **(-1p)**

P4

Skema e vlerësimit

Koment: Dy numra quhen të *lidhur* nëse atyre mund t'iu ndërrohen vendet pas një ose më shumë hapave, pa i ndryshuar vendet e numrave tjerë.

(Z) Zero pikë

(Z1) Vërtetimi që te gjitha renditjet nuk fitohen vetëm për disa vlera specifike të n .... **(0p)**

(A) – aditive mes vete

(A1) Vërtetimi që nëse a është i lidhur me numrat b dhe c, atëherë b dhe c janë të lidhur. .... **(3p)**

(A2) Përfundimi që të gjitha renditjet fitohen atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston një zinxhir i lidhjeve që i përfshin të gjithë numrat .... **(1p)**

Shënim: (A2) fitohet vetëm nëse është fituar (A1).

(A3) Vërtetimi që për $n<14$ nuk fitohen të gjitha renditjet .... **(1p)**

(A4) Vërtetimi që për $n=14$ ekziston zinxhiri i lidhjeve që i përshin të gjithë numrat................ **(1p)**

(A5) Vërtetimi që për çdo $n>14$ ekziston $k<n$ i tillë që $k+n$ është katror i plotë .... **(3p)**

(A6) Përfundimi që të gjitha renditjet fitohen për çdo $n>14$ .... **(1p)**

Shënim: (A6) fitohet vetëm nëse është fituar (A5).

Komente të përgjithshme

(K1) Çfarëdo zgjidhje tjetër e saktë vlerësohet me të gjitha pikët .... **(10p)**

(K2) Gabim i vogël në arsyetim ose llogaritje .... **(-1p)**