Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Testi Përzgjedhës për EGMO 2025

SKEMAT E VLERËSIMIT

P1

Le të jetë ABC trekendësh këndngushtë. Le të jenë D dhe E këmbëzat e lartësisë të trekëndëshit ABC të lëshuara nga kulmet A dhe B, përkatësisht. Le të jetë F reflektimi i pikës A ndaj drejtëzës BC. Le të jetë G pikë e tillë që katërkëndëshi $ABCG$ është paralelogram. Tregoni që rrathët e jashtashkruar të trekëndëshave BCF, ACG dhe CDE priten përsëri në një pikë të ndryshme nga pika C.

Zgjidhje: Le të jetë H ortoqendra e $\triangle ABC$.
Pohim: $\angle BHC = 180° - \angle BAC$.
Vërtetim: $\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = 180° - (90° - \angle ACB) - (90° - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle BAC$.
Vërejmë që $\angle BFC + \angle BHC = \angle BAC + 180° - \angle BAC = 180° \Rightarrow B, F, C, H$ i përkasin një rrethi. Poashtu, $\angle AGC + \angle AHC = \angle ABC + 180° - ABC = 180° \Rightarrow A, H, C, G$ i përkasin një rrethi. Si dhe $\angle CDH + \angle CEH = 90° + 90° = 180° \Rightarrow C, D, H, E$ i përkasin një rrethi. Nga këtu konkludojmë që rrathët e kërkuar priten sërish në pikën H.

Skema e vlerësimit

Zgjidhje e plotë (10 pikë)

Pikë të pjesshme:

(A) Vërtetimi që rrathët e jashtashkruar të trekëndëshave BCF dhe ACG kalojnë nëpër ortoqendrën e trekëndëshit ABC .... (6 pikë)

(A1) Vërtetimi vetëm për njërin prej trekëndëshave .... (4 pikë)

(B) Vërtetimi që rrethi i jashtashkruar i trekëndëshit CDE kalon nëpër ortoqendrën e trekëndëshit ABC .... (4 pikë)

Komente të përgjithshme

(K1) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje .... (-1 pikë)

P2

Gjeni të gjithë numrat natyrorë m dhe n të tillë që $3^m + n! - 1$ është katror i plotë i një numri natyror.

Zgjidhje: $(m, n) = (1, 2)$ ose $(2k, 1)$ për çfarëdo numri natyrorë k. Në mënyrë që shprehja të jetë katrorë i plotë i një numri natyror duhet të ekzistoj numri natyror x i tillë që $3^m + n! - 1 = x^2$. Nëse $n \geq 3$

atëherë $n! \equiv 0 \pmod 3$ dhe kemi $x^2 = 3^m + n! - 1 \equiv -1 \pmod 3$. Mirëpo kjo nuk është e mundur meqë për çdo numër natyror x kemi që $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$. Prandaj, $n = 1$ ose $n = 2$. Për $n = 1$ kemi që $x^2 = 3^m + 1 - 1 = 3^m$, e kjo qartazi është e mundur vetëm kur m është çift, pra në ketë rast të gjitha dyshet e tilla janë $(m, n) = (2k, 1)$ për çfarëdo numri natyrorë k. Nëse $n = 2$ kemi që $x^2 = 3^m + 1 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 3^m$, që do të thotë se $x - 1$ dhe $x + 1$ janë që të dyja fuqi të numrit 3 ose njëra nga to është 1. Mirëpo që të dyja nuk mund të jenë fuqi të numrit 3 sepse

$$pmmp(x-1, x+1) = pmmp(x-1, x+1-(x-1)) = pmmp(x-1, 2) = 1 \text{ ose } 2.$$

Atëherë njëra nga to është 1 e meqë $x - 1 < x + 1$ kemi $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow m = 1$. Pra një zgjidhje tjetër është $(m, n) = (1, 2)$.

Prandaj të gjitha dyshet që e plotësojnë kushtin e detyrës janë $(m, n) = (1, 2)$ ose $(2k, 1)$ për çfarëdo numri natyrorë k.

Skema e vlerësimit

Zgjidhje e plotë (10 pikë)

Pikë të pjesshme:

(A) Shqyrtimi i rastit $n = 1$ .... (1 pikë)
(B) Shqyrtimi i rastit $n = 2$ .... (5 pikë)
(C) Shqyrtimi i rastit $n \geq 3$ .... (4 pikë)

Komente të përgjithshme

(K1) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje .... (-1 pikë)
(K2) Shënimi i disa zgjidhjeve të sakta .... (0 pikë)

P3

Në katrorët e tabelës me dimensione 6×6 vendosen numrat $1, 2, 3, \ldots, 36$. Dy katrorë të tabelës janë fqinjë nëse kanë një brinjë ose një kulm të përbashkët. Një bretkosë fillimisht gjendet në katrorin me numrin 1. Çdo minutë, nëse ndonjë katror fqinj ka numër më të madh se katrori i bretkosës, ajo kërcen dhe vendoset te katrori fqinj me numrin më të madh prej të gjithë fqinjëve. Ajo vazhdon në këtë mënyrë deri sa të mos ketë më katrorë fqinjë me numër më të madh se katrori i saj. Sa është numri më i madh i mundshëm i kërcimeve që mund t'i bëjë bretkosa?

Zgjidhje: Konsiderojmë katrorët e vizituar nga bretkosa, përfshirë këtu edhe katrorin me numrin 1.

Pohim: Bretkosa mund t'i viztojë më së shumti 2 katrorë në çdo nëntabelë 2×2.

Vërtetim: Supozojmë që bretkosa i viziton 3 katrorë në një nëntabelë 2×2. Le të jenë numrat e tyre $a < b < c$. Vërejmë që çdo dy prej tyre janë fqinjë. Katrori i parë prej tyre që duhet të vizitohet është katrori me numrin a, por meqë $b < c$ është e pamundur për bretkosën që ta viztojë katrorin me numrin b, sepse bretkosa nga katrori me numrin a do të kërcejë te një katror me vlerë më të madhe ose baraz me c.

Tabela me dimensione 6×6 mund të ndahet në 9 nëntabela 2×2. Kjo do të thotë që bretkosa mund t'i vizitojë më së shumti $2 \cdot 9 = 18$ katrorë të tabelës, rrjedhimisht mund t'i bëjë më së shumti 17 kërcime.

Një vendosje e numrave që i mundëson 17 kërcime është kjo:

1	2	3	33	32	4
20	5	34	6	7	31
21	8	35	9	10	30
22	11	36	12	13	29
23	14	15	16	17	28
18	24	25	26	27	19

Skema e vlerësimit

Zgjidhje e plotë (10 pikë)

Pikë të pjesshme:

(A) Shembulli me 17 kërcime .... (4 pikë)

(B) Vërtetimi që bretkosa nuk mund t'i bëjë më shumë se 17 kërcime .... (6 pikë)

(B1) Vërtetimi që bretkosa mund t'i vizitojë më së shumti 2 katrorë të një nëntabele 2×2 . (3 pikë)

Komente të përgjithshme

(K1) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje .... (-1 pikë)

(K2) Rezultati i saktë, pa ndonjë arsyetim .... (0 pikë)

P4

Le të jenë a dhe b numra realë pozitiv të tillë që $a^3 + b^3 = 2(a^2 + b^2)$. Tregoni se vlen mosbarazimi,

$$\sqrt{a^3+1} + \sqrt{b^3+1} \leq a + b + 2.$$

Kur arrihet barazimi?

Zgjidhje: Nga mosbarazimi $AM - GM$ kemi që

$$\sqrt{a^3+1} = \sqrt{(a+1)(a^2-a+1)} \leq \frac{a+1+a^2-a+1}{2} = \frac{a^2+2}{2} = \frac{a^2}{2} + 1.$$

Në mënyrë të ngjashme kemi që

$$\sqrt{b^3+1} \leq \frac{b^2}{2} + 1.$$

Duke mbledhur dy mosbarazimet kemi që

$$\sqrt{a^3+1} + \sqrt{b^3+1} \leq \frac{a^2+b^2}{2} + 2.$$

Kështu që për të vërtetuar mosbarazimin tonë mjafton të tregohet që $a^2 + b^2 \leq 2(a+b)$.

Nga mosbarazimi i *Koshit* dhe kushti kemi që

$$2(a^2+b^2)(a+b) = (a^3+b^3)(a+b) \geq (a^2+b^2)^2 \Rightarrow 2(a+b) \geq a^2+b^2,$$

që duhej treguar.

Për rastin e barazisë, nga $AM - GM$ kemi që

$$a+1 = a^2 - a + 1 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ose } a = 2 \Rightarrow a = 2.$$

Ngjashëm kemi që $b = 2$. Këto vlera e plotësojnë kushtin detyrës, prandaj barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = b = 2$.

Skema e vlerësimit

Zgjidhje e plotë (10 pikë)

Pikë të pjesshme:

(A) Vërtetimi që $\sqrt{a^3+1} + \sqrt{b^3+1} \leq \frac{a^2+b^2}{2} + 2$ .... (4 pikë)

(B) Vërtetimi që $a^2 + b^2 \leq 2(a+b)$ .... (5 pikë)

(C) Rasti i barazisë .... (1 pikë)

Komente të përgjithshme

(K1) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje .... (-1 pikë)

(K2) Rasti i barazisë pa e treguar pikën (A) dhe (B) .... (0 pikë)