Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Olimpiada Matematike e Kosovës 2026

Klasa X

18 Janar 2026

Komente të përgjithshme:

(K1) Çdo zgjidhje e plotë vlerësohet me 10 pikë.

(K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje ..... -1 pikë

(K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim ..... 0 pikë

(K4) Vizatimi i figurës në detyrat e gjeometrisë ..... 0 pikë

(K5) Në skemat e mëposhtme, nënpikët (A$i.j$) (për shembull (A1.2)) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga (Ai) (për shembull (A1)).

1. Le të jetë a numër real i tillë që $a^2 - a$ dhe $a^3 - a$ janë numra të plotë. Tregoni që a është numër i plotë.

Zgjidhje. Nëse $a^2 - a = 0$ atëherë $a = 0$ ose $a = 1$, pra pohimi është i vërtetë. Le të jetë tani $a^2 - a \neq 0$. Meqë $a^2 - a$ dhe $a^3 - a$ janë numra të plotë kemi që $\frac{a^3-a}{a^2-a}$ është numër racional. Meqë

$$\frac{a^3 - a}{a^2 - a} = \frac{a(a-1)(a+1)}{a(a-1)} = a + 1,$$

kemi që a është numër racional dhe i ndryshëm nga 0 dhe 1. Atëherë kemi që ekzistojnë numri i plotë $m \neq 0$ dhe numri natyror n, të tillë që $a = \frac{m}{n}$ dhe $\text{pmmp}(m, n) = 1$. Atëherë kemi

$$a^2 - a = \frac{m^2}{n^2} - \frac{m}{n} = \frac{m^2 - mn}{n^2}$$

është numër i plotë, prandaj

$$n^2 \mid m^2 - mn \Rightarrow n \mid m^2 - mn \Rightarrow n \mid m^2 \Rightarrow n \mid 1 \Rightarrow n = 1.$$

Përfundojmë se a është numër i plotë.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërteton që a është numër racional ..... 5 pikë

(A1.1) Faktorizimet $a^2 - a = a(a-1)$ dhe $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ ..... 1 pikë

(A2.1) Numri i parë e pjesëton të dytin ..... 1 pikë

(A2) Shkruan $a = \frac{m}{n}$ ku $\text{pmmp}(m, n) = 1$. ..... 1 pikë

(A3) Vërteton që $n = 1$. ..... 4 pikë

2. Ana dhe Beni luajnë si vijon. Ana e zgjedh një numër real x dhe Benit ia tregon dy numra një pas një. Beni e di se njëri nga dy numrat që ia ka treguar Ana është vet numri x, kurse numri tjetër është numri $2x - \frac{1}{x}$, por ai nuk e di se cilin nga këta numra ajo e ka thënë të parin. Beni e fiton lojën nëse mund ta përcaktojë me siguri të plotë numrin x që ka zgjedhur Ana. Përndryshe lojën e fiton Ana. Gjeni të gjitha vlerat e numrit x për të cilat Ana e fiton lojën.

Zgjidhje. Le të shkruajmë me a dhe b numrat x dhe $2x - \frac{1}{x}$ në ndonjë renditje. Në mënyrë që Beni të mos mundet ta përcaktojë me siguri të plotë numrin x, duhet të vlejë $a = 2b - \frac{1}{b}$ dhe $b = 2a - \frac{1}{a}$ si dhe $a \neq b$. Kështu që do ta zgjidhim këtë sistem, për të caktuar vlerat e mundshme të numrit x që të fitojë Ana.

Meqë $b = 2a - \frac{1}{a}$ kemi

$$a = 2b - \frac{1}{b} = 2\left(2a - \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2a - \frac{1}{a}} = 4a - \frac{2}{a} - \frac{a}{2a^2 - 1} = \frac{8a^4 - 9a^2 + 2}{a(2a^2 - 1)} \Rightarrow 2a^4 - a^2 = 8a^4 - 9a^2 + 2$$

$$\Rightarrow 6a^4 - 8a^2 + 2 = 0 \Rightarrow 2(a^2 - 1)(3a^2 - 1) \Rightarrow a \in \left\{-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right\}.$$

Për $a \in \{-1, 1\}$ kemi $a = b$, që nuk është e mundur. Ndërsa për $a \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ kemi $a \neq b$. Prandaj për $x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ lojën e fiton Ana.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Transformon detyrën në ekuacion me një të panjohur ..... 3 pikë

(A1.1) Transformon detyrën në sistem të ekuacioneve ..... 2 pikë

(A2) Kufizimi i vlerave të x në bashkësinë $\left\{-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right\}$ ..... 4 pikë

3. Agroni ka 10 kuti të shënjuara me numrat $1, 2, \ldots, 10$. Kutia 1 përmban 1 biskotë, kutia 2 përmban 2 biskota, ... , kutia 10 përmban 10 biskota. Nga këto kuti, saktësisht pesë prej tyre përmbajnë vetëm biskota me shije dredhëze ndërsa pesë kutitë tjera përmbajnë vetëm biskota me shije molle. Beni nuk mund t'i dallojë biskotat nga pamja. Të paktën sa biskota duhet t'i marrë ai për t'u siguruar që ka marrë të paktën 10 biskota me shije dredhëze?

Zgjidhje. Do të tregojmë që Beni duhet t'i marrë të paktën 25 biskota.

Fillimisht, tregojmë që 25 biskota mjafton. Beni mund t'i merr 1 biskotë nga kutia 1, 2 biskota nga kutia 2, ndërsa nga tetë kutitë tjera, ai merr 2 biskota nga dy prej tyre dhe 3 biskota nga gjashtë kutitë tjera. Nëse i rendisim sipas madhësisë kemi

$$3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1$$

biskota. Pesë nga këta numra janë biskota me shije dredhëze, prandaj Beni ka marrë të paktën $1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 10$ biskota me shije dredhëze.

Tani tregojmë që më pak se kaq nuk bën. Në të njëjtën mënyrë, le të jenë

$$a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1$$

numrat e biskotave që ka marrë Beni, të renditura sipas madhësisë. Nëse biskotat e pesë numrave më të mëdhenjë dalin të jenë me shije molle, atëherë Beni do të ketë $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ biskota me shije dredhëze dhe ky numër duhet të jetë të paktën 10. Meqë nga kutia 1 Beni zgjedh më së shumti 1 biskotë, atëherë $a_1 \leq 1$. Kjo do të thotë që $a_5 \geq 3$, sepse përndryshe shuma maksimale do të ishte $2+2+2+2+1 = 9$. Por tani kemi që $a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6 \geq 3+3+3+3+3 = 15$, prej nga fitojme që

$$(a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6) + (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1) \geq 15 + 10 = 25.$$

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Shembulli me 25 biskota dhe arsyetimi pse ai shembull funksionon ..... 4 pikë

(A1.1) Shembulli me 26 ose 27 biskota ..... 2 pikë

(A2) Vërtetimi që duhen të paktën 25 biskota ..... 6 pikë

(A2.1) Konstatimi që $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 10$ apo ndonjë konstatim ekuivalent me këtë .... 1 pikë

(A2.2) Vërtetimi që $a_5 \geq 3$ ..... 2 pikë

4. Le të jetë $ABCD$ një katror dhe X një pikë në brinjën AD e tillë që $AX = 2XD$. Pika Y është e tillë që $\angle AYX = 90°$ dhe $BC = BY$. Vërtetoni se drejtëza CY e përgjysmon brinjën AD.

Zgjidhje. Le të jetë M mesi i AY. Pasi që $BY = BC = BA$ kemi që $BM \perp AY$. Poashtu $\angle XAY = 90° - \angle YAB = \angle ABM$. Nga kjo kemi që $\triangle XAY \sim \triangle ABM$ nga kriteri KKK (të dy janë kënddrejt dhe kanë edhe një kënd tjetër përkatës të barabartë). Nga kushti $AX = 2XD$ kemi që

$$\frac{AX}{AB} = \frac{AX}{AD} = \frac{2XD}{3XD} = \frac{2}{3}.$$

Prandaj nga ngjashmëria kemi që

$$\frac{XY}{AY} = \frac{XY}{2AM} = \frac{AX}{2AB} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

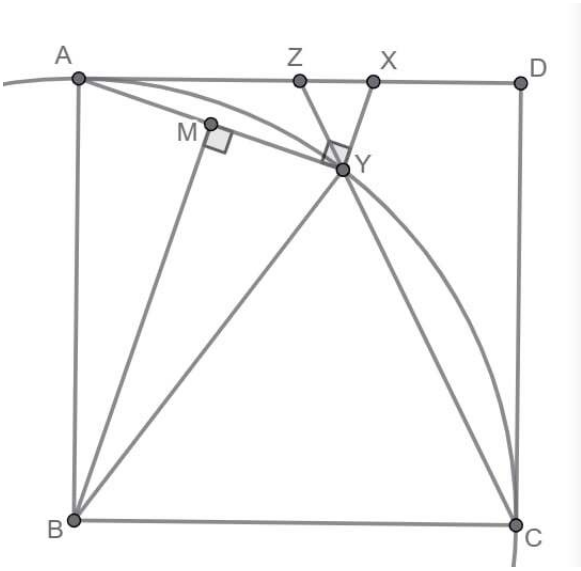
Le të jetë Z pikëprerja e CY dhe AD. Vërejmë se qendra e rrethit të jashtashkruar të $\triangle AYC$ është pika B, prandaj

$$\angle AYC = \frac{360° - \angle ABC}{2} = \frac{270°}{2} = 135°.$$

Nga kjo kemi që $\angle AYZ = 180° - 135° = 45°$ dhe pasi që $\angle AYX = 90°$ i bie që YZ të jetë përgjysmorja e $\angle AYX$. Nga Teorema e Përgjysmores së këndit kemi që

$$\frac{XZ}{ZA} = \frac{XY}{YA} = \frac{1}{3}.$$

Tani $AZ = \frac{3}{4}AX = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}AD = \frac{AD}{2}$. Pra, Z është mesi i brinjës AD, çka duhej vërtetuar.



Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që $\triangle XAY \sim \triangle ABM$ ..... 3 pikë

(A2) Vërtetimi që $AY = 3XY$ ..... 3 pikë

(A3) Vërtetimi që CY është përgjysmore e $\angle AYX$ ..... 1 pikë