Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Olimpiada Matematike e Kosovës 2026

Klasa XI

18 Janar 2026

Komente të përgjithshme:

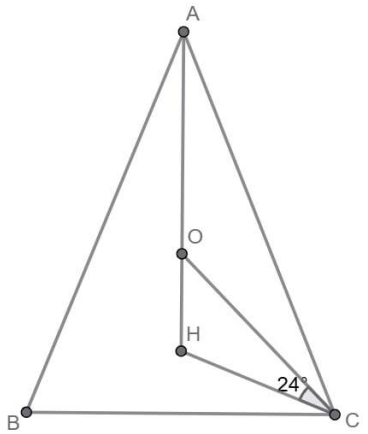
(K1) Çdo zgjidhje e plotë vlerësohet me 10 pikë.
(K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje ..... -1 pikë
(K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim ..... 0 pikë
(K4) Vizatimi i figurës në detyrat e gjeometrisë ..... 0 pikë
(K5) Në skemat e mëposhtme, nënpikët (A$i.j$) (për shembull (A1.2)) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga (Ai) (për shembull (A1)).

1. Le të jetë $\triangle ABC$ trekëndësh këndngushtë dhe le të jenë H ortoqendra dhe O qendra e rrethit të jashtëshkruar të tij. Supozojmë që O gjendet në segmentin AH. Nëse $\angle HCO = 24^\circ$, gjeni të gjitha këndet e trekëndëshit $\triangle ABC$.

Zgjidhje. Pika O gjendet në përmesoren e brinjës BC. Pasi që O është në AH, i bie qe AO është normale në BC, prandaj A është në përmesoren e brinjës BC. Nga kjo kemi që $AB = AC$. Le të jetë $\angle OAC = \alpha$. Pasi që AO është edhe përgjysmore e $\angle BAC$ kemi që $\angle BAC = 2\alpha$, prej nga $\angle ABC = 90^\circ - \alpha = \angle ACB$. Pasi që CH normale në AB kemi që $\angle HCB = 90^\circ - \angle ABC = \alpha$. Tutje, pasi që $OA = OC$ kemi që $\angle OCA = \angle OAC = \alpha$. Tani

$$90^\circ - \alpha = \angle ACB = \angle OCA + \angle OCH + \angle HCB = 2\alpha + 24^\circ \iff \alpha = 22^\circ$$
$$\iff \angle ABC = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ.$$

Pasi që $AB = AC$ kemi që $\angle ACB = 68^\circ$ dhe $\angle BAC - 180^\circ - 2\angle ABC = 44^\circ$.



Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që $AB = AC$ ..... 2 pikë

(A2) Shprehja e $\angle HCB$ në varësi të $\angle OCA$..... 3 pikë

(A3) Shprehja e këndit $\angle BAC$ nëpërmjet njërit prej këndeve ne (A2)..... 2 pikë

(A4) Vërtetimi që $90^\circ - \alpha = 2\alpha + 24^\circ$..... 2 pikë

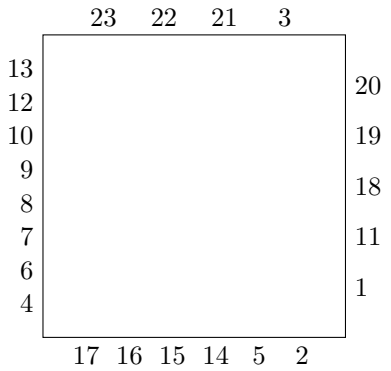
(A5) Llogaritja e këndeve të $\triangle ABC$ ..... 1 pikë

2. Beni ka n shkopinjë me gjatësi $1, 2, \ldots, n$. Ai dëshiron të formojë një katror duke i përdorur secilin nga këta shkopinjë për t'i ndërtuar brinjët e katrorit, në atë mënyrë që secila brinjë të ketë numër të ndryshëm të shkopinjëve. Cila është vlera më e vogël e n për të cilën ai mund ta bëjë këtë?

Zgjidhje. Meqë çdo brinjë duhet të ketë numër të ndryshëm të shkopinjëve, atëherë duhen të paktën $1+2+3+4 = 10$ shkopinjë, pra $n \geq 10$. Shuma e gjatësive të shkopinjëve është $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Meqë brinjët e katrorit duhet të kenë gjatësi të barabartë, atëherë secila brinjë ka gjatësi $\frac{n(n+1)/2}{4} = \frac{n(n+1)}{8}$. Kjo gjatësi duhet të jetë numër i plotë, prandaj n ose $n+1$ duhet të jetë shumëfish i numrit 8.

Numri i parë që plotëson këto kushtë është $n = 15$. Për $n = 15$, gjatësia e brinjëve është $\frac{15 \cdot 16}{8} = 30$. Por, meqë $15 + 14 = 29 < 30$, atëherë çdo brinjë duhet t'i përmbajë të paktën 3 shkopinjë, e meqë të gjitha brinjët kanë numër të ndryshëm të shkopinjëve, atëherë numri i shkopinjëve është të paktën $3+4+5+6 = 18$, që është më shumë se që kemi. Në të njëjtën mënyrë tregohet që edhe $n = 16$ nuk bën.

Numri i radhës që plotëson kushtet është $n = 23$. Për $n = 23$, shuma e brinjëve është $\frac{23 \cdot 24}{8} = 69$. Një konfiguracion që funksionon është ky:



Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që katrori nuk mund të formohet për $n < 23$ ..... 7 pikë

(A1.1) Vërtetimi që katrori nuk mund të formohet për $n < 10$ ..... 1 pikë

(A1.2) Konstatimi që gjatësia e brinjëve është $\frac{n(n+1)}{8}$ ..... 1 pikë

(A1.3) Vërtetimi që $8 \mid n$ ose $8 \mid n+1$ ..... 1 pikë

(A1.4) Vërtetimi që katrori nuk mund të formohet për $n = 15, 16$ ..... 4 pikë

(A2) Konstruktimi i shembullit për $n = 23$ ..... 3 pikë

3. Ana dhe Beni luajnë si vijon. Së pari, secilit numër të thjeshtë p, Ana ia cakton një numër natyror a_p. Ajo duhet që numrave të ndryshëm $p \neq q$ t'i caktojë numra të ndryshëm $a_p \neq a_q$. Duke i ditur numrat që ka zgjedhur Ana, Beni zgjedh disa numra të thjeshtë sipas dëshirës $r_1, r_2, \ldots, r_k$, jo-domosdoshmërisht të ndryshëm. Megjithatë, për çdo numër të thjeshtë r që zgjedh Beni, ai duhet ta zgjedhë atë saktësisht a_r herë. Beni e fiton lojën nëse mund të kombinojë shenjat $+$ dhe $-$ në ndonjë mënyrë të tillë që numri

$$\pm\frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \pm \cdots \pm \frac{1}{r_k}$$

është numër i plotë, përndryshe lojën e fiton Ana. Cili nga lojtarët ka strategji të fitores?

Zgjidhje. Ana ka strategji të fitores. Ajo cakton $a_2 = 7$, dhe $a_p = p - 2$ për çdo numër të thjeshtë $p \geq 3$, që qartazi plotëson kushtin (pasi $7 + 2 = 9$ nuk është numër i thjeshtë). Le të jenë $p_1, p_2, \ldots, p_s$ numrat *e ndryshëm* që zgjedh Beni dhe le të jenë $a_1, a_2, \ldots, a_s$ numrat që i cakton Ana numrave të Benit, pra $a_i = a_{p_i}$ për çdo $1 \leq i \leq s$. Çfarëdo kombinimi të shenjave që ai bën rezulton në shprehjen

$$\frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} + \cdots + \frac{b_s}{p_s},$$

ku $b_1, \ldots, b_s$ janë numra të plotë të tillë që $|b_i| \leq a_i$ për çdo $1 \leq i \leq s$. Pasi a_i është tek për çdo $1 \leq i \leq s$, kemi se b_i është poashtu numër tek. Poashtu, për çdo numër tek p_i kemi $|b_i| \leq a_i < p_i$. Në veçanti vlen $b_i \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ për çdo $1 \leq i \leq s$. Tutje

$$\frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} + \cdots + \frac{b_s}{p_s} = \frac{b_1 p_2 \cdots p_s + b_2 p_1 p_3 \cdots p_s + \cdots + b_s p_1 p_2 \cdots p_{s-1}}{p_1 p_2 \cdots p_s}.$$

Tani p_1 e plotpjesëton secilin nga monomet në numërues, përveç $b_1 p_2 p_3 \cdots p_s$ që nuk plotpjesëtohet me p_1 meqë $b_1 \not\equiv 0 \pmod{p_1}$. Përfundojmë se ky numër nuk mund të jetë i plotë.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Konstatimi i ndonjë caktimi të duhur për a_p (p.sh. $a_2 = 7$, $a_p = p - 2$ për $p \geq 3$) ..... 4 pikë

(A2) Transformimi i shprehjes në $\frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} + \cdots + \frac{b_s}{p_s}$ me konstatimin se $|b_i| \leq a_i$ ..... 1 pikë

(A3) Nëse a_p janë numra tek, b_i janë numra tek ..... 1 pikë

(A4) Transformimi i shprehjes në një thyesë me emëruesin e përbashkët (ose shumëzimi i shprehjes me $p_1 \cdots p_s$) ..... 1 pikë

(A5) Përfundimi duke treguar se $p_1 \nmid b_1$ ..... 3 pikë

Pikë të pjesshme joaditive me pikët sipër:

(B1) a_p është tek për çdo p (përndryshe $\frac{a_p}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}) = 0$ dhe Beni fiton) ..... 1 pikë

(B2) Për p tek kemi $a_p < p$ (përndryshe $\frac{a_p + p}{2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{a_p - p}{2} \frac{1}{p} = 1$ dhe Beni fiton) ..... 2 pikë

4. Le te jetë n numër natyror dhe a, b, c numra realë të tillë që

$$\sqrt{n} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}}.$$

Tregoni që ekzistojnë numrat $x, y, z \in \{-1, 0, 1\}$ ku të paktën njëri prej tyre është jo-zero, të tillë që $ax + by + cz = 0$.

Zgjidhje. Nga mosbarazimi i Koshit kemi që $a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}$ prandaj

$$\sqrt{n} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}} \leq \sqrt{3} \Rightarrow n \leq 3.$$

Rasti 1. $n = 1$.

Kemi $\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} = 1$. Duke ngritur në kator dhe pas rregullimeve kemi $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = 0$, prandaj $ab = bc = ca = 0$ që do të thotë që të paktën dy prej numrave a, b, c janë të barabartë me 0. Supozojmë që $a = b = 0$, kështu që duke marr $x = y = 1$ dhe $z = 0$ kemi $ax + by + cz = 0$.

Rasti 2. $n = 2$.

Kemi $\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} = \sqrt{2}$. Duke ngritur në kator dhe pas rregullimeve kemi

$$(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 0.$$

Prandaj të paktën njëri nga numrat $a + b + c, a + b - c, b + c - a, c + a - b$ është 0, kështu që ekzistojnë numrat $x, y, z \in \{-1, 1\}$ të tillë që $ax + by + cz = 0$.

Rasti 3. $n = 3$

Kemi $\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} = \sqrt{3}$. Duke ngritur në kator dhe pas rregullimeve kemi

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 0,$$

prandaj $a^2 - b^2 = b^2 - c^2 = c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2$, kështu që të paktën dy prej numrave a, b, c janë të barabartë. Supozojmë që $a = b$, kështu që duke marr $x = 1, y = -1$ dhe $z = 0$ kemi $ax + by + cz = 0$.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërteton që $n \leq 3$ ..... 3 pikë

(A2) Zgjidh detyrën për $n = 1$ ..... 2 pikë

(A3) Zgjidh detyrën për $n = 2$ ..... 3 pikë

(A4) Zgjidh detyrën për $n = 3$ ..... 2 pikë