Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Olimpiada Matematike e Kosovës 2026

Klasa XII

18 Janar 2026

Komente të përgjithshme:

(K1) Çdo zgjidhje e plotë vlerësohet me 10 pikë.

(K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje ..... -1 pikë

(K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim ..... 0 pikë

(K4) Vizatimi i figurës në detyrat e gjeometrisë ..... 0 pikë

(K5) Në skemat e mëposhtme, nënpikët (A$i.j$) (për shembull (A1.2)) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga (Ai) (për shembull (A1)).

1. Janë dhënë k letra me numrat $1, 2, \ldots, k$. Ana dhe Beni luajnë një lojë me radhë, ku Ana fillon e para. Në çdo lëvizje, lojtari që luan e largon një nga letrat e dhëna. Loja përfundon kur mbesin vetëm dy letra. Beni e fiton lojën nëse shuma e të gjitha letrave që janë larguar plotpjesëtohet me k, përndryshe lojën e fiton Ana. Cili lojtar ka strategji fituese nëse:

(a) $k = 20$?

(b) $k = 26$?

Zgjidhje: (a) Le të jenë a dhe b dy numrat e mbetur në fund. Kemi

$$1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} \equiv 10 \pmod{20},$$

që do të thotë se Beni fiton vetëm nëse shuma e dy numrave të mbetur është $10 \pmod{20}$. Meqë $a + b \leq 19 + 20 = 39$, shumat e tilla janë 10 dhe 30. Kemi këto dyshe si vlera të mundshme të (a, b):

$$(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (10, 20), (11, 19), (12, 18), (13, 17), (14, 16).$$

Ana e fiton lojën përderisa dy numrat e fundit nuk janë njëra nga këto dyshe. Kemi 9 dyshe të tilla dhe Ana ka 9 lëvizje. Strategjia e saj është që në çdo lëvizje ta largojë nga një numër nga secila dyshe me radhë (nëse dy letrat me numra nga njëra dyshe veçse janë larguar nga Beni më herët, ajo thjesht vazhdon te dyshja tjetër). Në këtë mënyrë, dy numrat e mbetur në fund nuk do të japin shumën 10 ose 30, që do të thotë se Ana e fiton lojën.

(b) Le të jenë a dhe b dy numrat e mbetur në fund. Kemi

$$1 + 2 + \ldots + 26 = \frac{26 \cdot 27}{2} \equiv 13 \pmod{26},$$

që do të thotë se Beni fiton vetëm nëse shuma e dy numrave të mbetur është 13 (mod 26). Meqë $a+b \leq 26+27=53$, shumat e tilla janë 13 dhe 39. Kemi këto dyshe si vlera të mundshme të (a,b):

$$(1,12),(2,11),(3,10),(4,9),(5,8),(6,7),(13,26),(14,25),(15,24),(16,23),(17,22),(18,21),(19,20).$$

Beni e fiton lojën nëse dy numrat e fundit janë njëra nga këto dyshe. Vërejmë që çdo numër nga 1 deri në 26 është në saktësisht njërën nga këto dyshe. Strategjia e Benit është pas çdo lëvizje të Anës, nëse Ana largon një numër x, ai largon numrin që është në të njëjtën dyshe me numrin x. Në këtë mënyrë, pas një lëvizje të Anës dhe Benit largohet njëra nga dyshet. Kemi 13 dyshe të tilla dhe 12 lëvizje të Anës dhe Benit, që do të thotë se në fund, dy numrat e mbetur do të jenë pjesë e të njëjtës dyshe, rrjedhimisht Beni e fiton lojën.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Rasti $k=20$ ..... 6 pikë

(A1.1) Vërtetimi që Beni fiton vetëm nëse shuma e dy numrave të mbetur është 10 ose 30 ..... 1 pikë

(A1.2) Shkruarja e dysheve për të cilat Beni e fiton lojën ..... 1 pikë

(A2) Rasti $k=26$ ..... 4 pikë

(A2.1) Vërtetimi që Beni fiton vetëm nëse shuma e dy numrave të mbetur është 13 ose 39 ..... 1 pikë

(A2.2) Shkrimi i dysheve për të cilat Beni e fiton lojën ..... 1 pikë

2. Gjeni të gjithë numrat natyrorë $n>1$ me vetinë vijuese: për çfarëdo pjesëtues pozitivë $a<n$ dhe $b<n$ të numrit n (jo-domosdoshmërisht të ndryshëm) të tillë që $\frac{a+b}{2}$ është numër natyror, atëherë $\frac{a+b}{2}$ është gjithashtu pjesëtues i numrit n.

Zgjidhje. Shqyrtojmë së pari rastin kur n është tek. Le të jetë $p \geq 3$ pjesëtuesi më i vogël i thjeshtë i numrit n. Nëse $n>p$, meqë $(p+1)/2$ është numër natyror, kemi $(p+1)/2 \mid n$, por $1<(p+1)/2<p$ nuk mund ta pjesëtojë n. Nëse $n=p$, numrat e thjeshtë qartazi janë zgjidhje. Kështu, nëse n nuk është numër i thjeshtë, mund të supozojmë se n është çift.

Nëse n plotpjesëtohet me 4, duhet të kemi $(2+n/2)/2 = 1+n/4 \mid n = 4(1+n/4)-4$ që nuk është e mundur përveç nëse $n=4$ ose $n=12$. Qartazi $n=4$ është zgjidhje, kurse $n=12$ jo, sepse $(4+6)/2=5$ nuk e pjesëton 12.

Nëse $n \equiv 2 \pmod 4$, duhet të kemi $(1+n/2)/2 = \frac{n+2}{4} \mid n = 4(\frac{n+2}{4})-2$ që nuk është e mundur përveç nëse $n=2$ ose $n=6$ që janë zgjidhje.

Përfundojmë që zgjidhjet janë numrat $4,6$ dhe të gjithë numrat e thjeshtë p.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Nëse n nuk është numër i thjeshtë, n është çift ..... 2 pikë

(A2) Rasti $n \equiv 0 \pmod 4$ ..... 4 pikë

(A2.1) Relacioni $\frac{n}{4}+1 \mid n$ ..... 2 pikë

(A3) Rasti $n \equiv 2 \pmod 4$ ..... 4 pikë

(A3.1) Relacioni $\frac{n+2}{4} \mid n$ ..... 2 pikë

(A3.2) Nëse $n \neq 2$, atëherë $3 \mid n$ ..... 1 pikë

3. Le të jetë $\mathbb{R}^+$ bashkësia e numrave realë pozitivë. Gjeni të gjitha funksionet $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ të tillë që për çdo $x,y \in \mathbb{R}^+$ vlen

$$f\left(f\left(x^2y\right)+xf(y)^2\right) = xyf\left(x+f(y)\right).$$

Zgjidhje. Vërejmë se $f(x)=x$ për çdo $x \in \mathbb{R}^+$ është zgjidhje, pasi $x^2y+xy^2=xy(x+y)$. Fillojmë duke marrë $x=1$, prej nga kemi

$$f(f(y)+f(y)^2) = yf(1+f(y)).$$

Nëse $f(a)=f(b)$, meqë funksioni f është pozitiv, kemi

$$a = \frac{f(f(a)+f(a)^2)}{f(1+f(a))} = \frac{f(f(b)+f(b)^2)}{f(1+f(b))} = b,$$

prandaj funksioni f është injektiv. Tani marrim $y = 1/x$, prej nga fitojmë

$$f(f(x) + xf(1/x)^2) = f(x + f(1/x)).$$

Meqë f është injektiv, tutje kemi

$$f(x) + xf(1/x)^2 = x + f(1/x).$$

Duke zëvendësuar x me $1/x$ në relacionin sipër, kemi

$$f(1/x) + \frac{f(x)^2}{x} = \frac{1}{x} + f(x).$$

Nëse shkruajmë $A = f(x), B = f(1/x)$, nga relacionet e sipërme kemi

$$\begin{cases} A + xB^2 = x + B \\ B + \frac{1}{x}A^2 = \frac{1}{x} + A. \end{cases}$$

Shkruajmë $C = A - x$ dhe kemi

$$\begin{cases} C = B(1 - xB) \\ B + \frac{1}{x}(C + x)^2 = \frac{1}{x} + A \end{cases} \iff \begin{cases} C = B(1 - xB) \\ B = -\frac{1}{x}C^2 - C + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Duke zëvendësuar ekuacionin e dytë në ekuacionin e parë në sistemin sipër, fitojmë

$$C^2\left(\frac{C^2}{x} + 2C + x - \frac{1}{x}\right) = 0 \iff C^2((C + x)^2 - 1) = 0 \iff (A - x)^2(A^2 - 1) = 0.$$

Meqë $A = f(x) > 0$, për çdo $x \in \mathbb{R}^+$ kemi $f(x) = x$ ose $f(x) = 1$. Nga kjo kemi $f(1) = 1$ dhe meqë f është injektiv, konkludojmë që $f(x) = x$ për çdo $x \in \mathbb{R}^+$ është zgjidhja e vetme.

Shënim. Një mënyrë tjetër për të zgjidhur sistemin është duke zëvendësuar $B = -\frac{1}{x}A^2 + \frac{1}{x} + A$ në ekuacionin e parë dhe pas shumëzimit me x, të shkruajmë ekuacionin kuadratik sipas x:

$$(A^2 - 1)x^2 - 2A(A^2 - 1)x + A^2(A^2 - 1) = 0.$$

Nga këtu fitojmë faktorizimin

$$(A^2 - 1)(x^2 - 2Ax + A^2) = 0 \iff (A^2 - 1)(A - x)^2 = 0.$$

Një mënyrë tjetër: nga $A + xB^2 = x + B$ kemi

$$Bx - 1 = (x - A)/B,$$

kurse nga $B + \frac{1}{x}A^2 = \frac{1}{x} + A$ (pas shumëzimit me x) kemi

$$Bx - 1 = A(x - A).$$

Prandaj patjetër $(x - A)(A - 1/B) = 0$. Nëse $A = f(x) \neq x$ për ndonjë x, kemi $AB = 1$, pra $(x - A)A^2 = x - A \iff (x - A)(A^2 - 1) = 0$. Meqë $A \neq x$, kemi $f(x) = 1$, por kjo ndodh vetëm kur $x = 1$ nga injektiviteti (pasi $f(1) = 1$ rrjedh nga zëvendësimi $x = y = 1$).

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) $f(x) = x$ është zgjidhje ..... 0 pikë

(A2) f është injektiv ..... 3 pikë

(A3) Relacioni $f(x) + xf(1/x)^2 = x + f(1/x)$ ..... 1 pikë

(A4) Relacioni $f(1/x) + \frac{f(x)^2}{x} = \frac{1}{x} + f(x)$ ..... 1 pikë

(A5) Zgjidhja e sistemit sipas $f(x)$ dhe $f(1/x)$ ..... 5 pikë

(A5.1) Tregon që $f(x)$ është zgjidhje e një ekuacioni polinomial të shkallës 4 me koeficientë që varen nga x ..... 1 pikë

Pika e mëposhtme është joaditive me të gjitha pikët sipër.

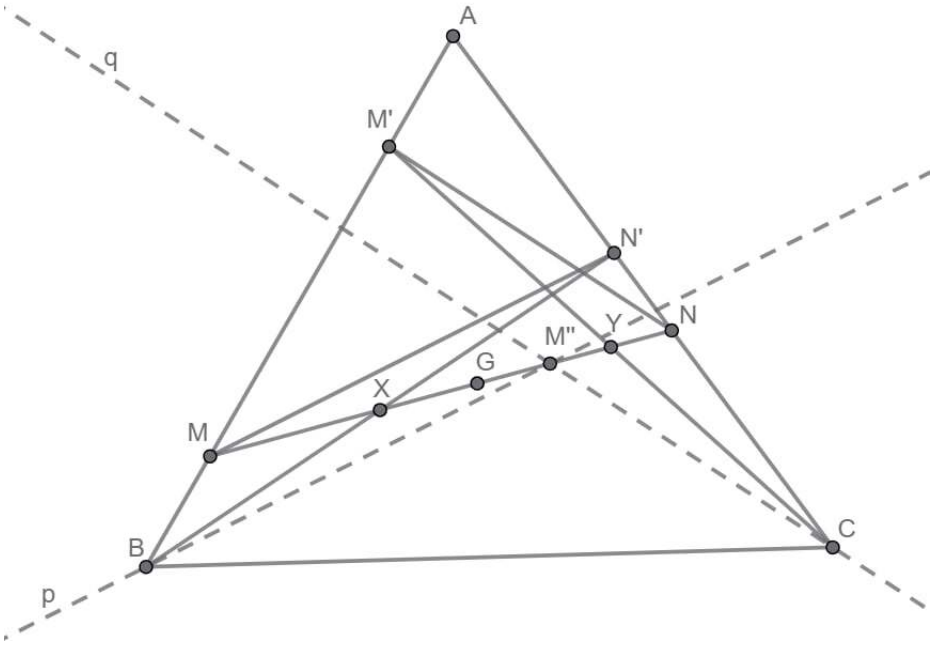
(B1) Zgjidhja e detyrës nën supozimin që funksioni është injektiv ..... 4 pikë

4. Le të jetë $\triangle ABC$ trekëndësh me qendër të rëndesës G. Një drejtëz që kalon nëpër G pret brinjët AB dhe AC në pikat M dhe N, përkatësisht. Le të jenë M' dhe N' reflektimet e pikave M dhe N ndaj meseve të brinjëve AB dhe AC, përkatësisht. Le të jetë p drejtëza që kalon nëpër B dhe është paralele me MN' dhe le të jetë q drejtëza që kalon nëpër C dhe është paralele me NM'. Tregoni që drejtëzat p dhe q priten në drejtëzën MN.

Zgjidhje. Le të jenë X dhe Y pikë prerjet e BN' dhe CM' me MN, përkatësisht. Vërejmë se për $\triangle BNN'$ kemi që BG është medianë dhe që G e ndan medianën në raport $2:1$ prandaj G është qendër e rëndesës së $\triangle BNN'$, dhe ngjashëm edhe e $\triangle CMM'$. Nga kjo i bie që NG e përgjysmon segmentin BN', pra X është mesi i BN'. Ngjashëm Y është mesi i CM'. Le të jenë M'' dhe N'' reflektimet e M dhe N ndaj X dhe Y, përkatësisht. Pasi që BN' dhe MM'' kanë mes të njejtë i bie që $BMN'M''$ është paralelogram prandaj $BM'' \parallel MN'$. Ngjashëm $CN'' \parallel NM'$. Tani nga vetitë e qendrës së rëndesës kemi që

$$XY = XG + GY = \frac{GN}{2} + \frac{GM}{2} = \frac{MN}{2} \Rightarrow MX + YN = MN - XY = MN - \frac{MN}{2} = \frac{MN}{2}.$$

Tani, $MM'' + NN'' = 2MX + 2NY = 2(MX + NY) = 2\dfrac{MN}{2} = MN$, prej nga rrjedh $M'' \equiv N''$. Pra M'' dhe N'' janë e njëjta pikë dhe përfundimi rrjedh.



▲

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që G është qendër e rëndesës për $\triangle BNN'$ dhe $\triangle CNN'$ ..... 2 pikë

(A2) Vërtetimi që $BM'' \parallel MN'$ dhe $CN'' \parallel NM'$ ..... 3 pikë

(A3) Vërtetimi që $\dfrac{XY}{2} = MN$ ..... 2 pikë

(A4) Vërtetimi që $MM'' + NN'' = MN$ ..... 2 pikë