Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Olimpiada Matematike e Kosovës 2026

Klasa VIII

18 Janar 2026

Komente të përgjithshme:

(K1) Çdo zgjidhje e plotë vlerësohet me 10 pikë.

(K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje ..... -1 pikë

(K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim ..... 0 pikë

(K4) Vizatimi i figurës në detyrat e gjeometrisë ..... 0 pikë

(K5) Në skemat e mëposhtme, nënpikët (A$i.j$) (për shembull (A1.2)) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga (Ai) (për shembull (A1)).

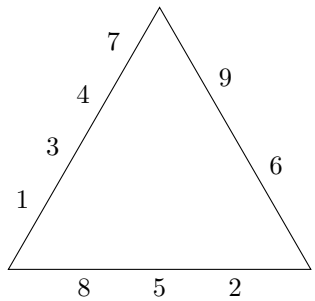
1. Beni ka n shkopinjë me gjatësi $1, 2, \ldots, n$. Ai dëshiron të formojë një trekëndësh barabrinjës duke i përdorur secilin nga këta shkopinjë për t'i ndërtuar brinjët e trekëndëshit, në atë mënyrë që secila brinjë të ketë numër të ndryshëm të shkopinjëve. Cila është vlera më e vogël e n për të cilën ai mund ta bëjë këtë?

Zgjidhje. Meqë çdo brinjë duhet të ketë numër të ndryshëm të shkopinjëve, atëherë duhen të paktën $1 + 2 + 3 = 6$ shkopinjë, pra $n \geq 6$. Shuma e gjatësive të shkopinjëve është $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Meqë brinjët e trekëndëshit duhet të kenë gjatësi të barabartë, atëherë secila brinjë ka gjatësi $\frac{n(n+1)/2}{3} = \frac{n(n+1)}{6}$. Kjo gjatësi duhet të jetë numër i plotë, prandaj n ose $n + 1$ duhet të jetë shumëfish i numrit 3.

Numri i parë që i plotëson këto kushte është $n = 6$. Për $n = 6$, gjatësia e brinjëve është $\frac{6 \cdot 7}{6} = 7$. Meqë të gjithë shkopinjët kanë gjatësi 6 ose më pak, duhen të paktën dy shkopinjë në çdo brinjë. Atëherë numri i shkopinjëve që duhen gjithsej është të paktën $2 + 3 + 4 = 9$, që është më shumë se që kemi.

Në të njëjtën mënyrë tregojmë që as $n = 8$ nuk funksionon, ndërsa për $n = 7$ gjatësia nuk del numër i plotë.

Për $n = 9$ Beni mund ta formojmë trekëndëshin në këtë mënyrë:



Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që trekëndëshi nuk mund të formohet me më pak se 9 shkopinjë ..... 7 pikë

(A1.1) dhe (A1.2) mund të fitohen vetëm nëse nuk është fituar asnjëra nga (A1.3), (A1.4) dhe (A1.5).

(A1.1) Konstatimi që gjatësia e brinjëve është $\frac{n(n+1)}{6}$ ..... 1 pikë

(A1.2) Vërtetimi që trekëndëshi nuk mund të formohet për $n \leq 5$ ..... 1 pikë

(A1.3) Vërtetimi që trekëndëshi nuk mund të formohet për $n \leq 6$ ..... 2 pikë

(A1.4) Vërtetimi që trekëndëshi nuk mund të formohet për $n = 7$ ..... 2 pikë

(A1.5) Vërtetimi që trekëndëshi nuk mund të formohet për $n = 8$ ..... 3 pikë

(A2) Konstruktimi i shembullit me 9 shkopinjë ..... 2 pikë

2. Le të jenë x dhe y numra realë pozitivë të tillë që $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$. Tregoni që

$$x + y \geqslant 2.$$

Zgjidhje. Do përdorim faktin që nëse t është numër real, atëherë $t^2 \geq 0$. Nga kushti kemi që

$$xy = x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1 \geq 1.$$

Prandaj $xy \geq 1$. Pasi x dhe y janë numra realë pozitivë, mjafton të tregojmë se $(x + y)^2 \geq 4$. Duke përdorur kushtin përsëri dhe $xy \geq 1$ kemi

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 5xy - 1 \geq 5 \cdot 1 - 1 = 4.$$

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërteton që $xy \geq 1$ ..... 7 pikë

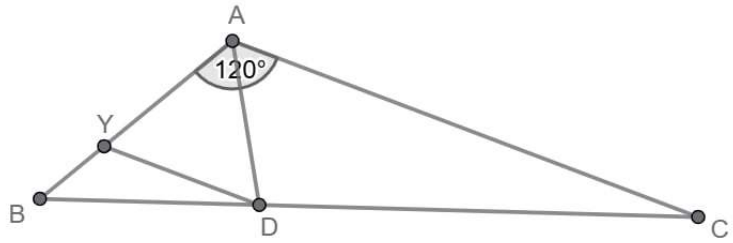
(A2) Tregon që jobarazimi $x + y \geq 2$ është ekuivalent me $xy \geq 1$. ..... 3 pikë

3. Le të jetë $\triangle ABC$ trekëndësh me masën e këndit $\angle BAC = 120°$ dhe gjatësitë $AB = 1, AC = 2$. Le të jetë D një pikë në brinjën BC e tillë që drejtëza AD e përgjysmon këndin $\angle BAC$. Gjeni gjatësinë e segmentit AD.

Zgjidhje. Le të jetë Y një pikë në AB e tillë që $YD \parallel AC$. Vërejmë se nga vetitë e paralelizmit kemi që $\angle YDA = \angle DAC = 60°$, pra $\triangle AYD$ është barabrinjës. Shkruajmë me x gjatësinë e segmentit BY. Nga kjo del se $YD = AD = AY = 1 - x$. Tani, nga teorema e Talesit kemi

$$\frac{BY}{BA} = \frac{YD}{AC} \iff \frac{x}{1} = \frac{1-x}{2} \iff 2x = 1 - x \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3} \iff 1 - x = \frac{2}{3}.$$

Pasi që $AD = AY = 1 - x$ kemi që $AD = \dfrac{2}{3}$.



Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që $\triangle AYD$ është barabrinjës ..... 3 pikë

(A2) Përdorimi i Teoremës së Talesit për të gjetur njërën prej gjatësive AY ose YB ..... 6 pikë

4. Për secilin numër natyror, Ana kryen këtë veprim: ajo mbledh të gjitha shifrat në pozitat tek të numrit dhe kësaj shume ia zbret dyfishin e shumës së shifrave në pozitat çift. Renditjen e shifrave ajo e fillon nga e djathta, pra shifra e njëshëve është në pozitën e parë, shifra e dhjetëshëve në pozitën e dytë, e kështu me radhë. Për shembull, për numrin 1483, pas kryerjes së veprimit Ana fiton

$$\underbrace{3+4}_{\text{pozitat tek}} - 2 \times \underbrace{(8+1)}_{\text{pozitat çift}} = -11.$$

Ana vëren se ndonjëherë dy numra të ndryshëm japin rezultatin e njëjtë pas veprimit të saj. Për sa mund të ndryshojnë më së paku dy numra të tillë?

Zgjidhje. Tregojmë se ndryshimi më i vogël i mundshëm pozitiv është 3. Shkruajmë me $S(n)$ veprimin e Anës në numrin n. Së pari $1000 - 997 = 3$ dhe

$$S(997) = 9 + 7 - 2 \cdot 9 = -2 = 0 + 0 - 2 \cdot (0 + 1) = S(1000).$$

Tani tregojmë se ndryshimi nuk mund të jetë 1 ose 2. Supozojmë se $m - n = 1$. Nëse numri n ka shifrën e parë më të vogël se 9, qartazi nuk mund të kemi $S(m) = S(n)$ pasi m dhe n dallojnë vetëm tek shifra e njësheve. Prandaj mund të supozojmë se

$$n = \overline{\cdots x \underbrace{99\cdots9}_{k}}$$

ku shifra 9 përsëritet k herë, dhe x është shifër ≤ 8. Tani për numrin m kemi

$$m = n + 1 = \overline{\cdots (x+1) \underbrace{00\cdots0}_{k}}.$$

Pasi shifrat e m dhe n pas shifrës në pozitën $k+1$ janë të njejta, mjafton të krahasojmë $k+1$ shifrat e para. Nëse k është tek, kemi

$$S(n) = \frac{k+1}{2} \cdot 9 - 2 \cdot \left(\frac{k-1}{2} \cdot 9 + x\right) = \frac{-k+3}{2} \cdot 9 - 2x + \cdots, S(m) = -2(x+1) + \cdots,$$

ku $+\cdots$ nënkupton veprimin e Anës në shifrat pas x. Tani $S(m) = S(n)$ jep $\frac{-k+3}{2} \cdot 9 = -2$, por asnjë numër tek k nuk është zgjidhje e këtij ekuacioni.

Ngjashëm, nëse k është çift, kemi

$$S(n) = \frac{k}{2} \cdot 9 + x - 2 \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot 9\right) + \cdots = -\frac{k}{2} \cdot 9 + x, S(m) = x + 1 + \cdots.$$

Përsëri $S(m) = S(n)$ jep $-\frac{k}{2} \cdot 9 = 1$, që nuk vlen për asnjë numër çift k.

Tutje supozojmë se $m - n = 2$. Nëse numri n ka shifrën e parë më të vogël se 8, qartazi nuk mund të kemi $S(m) = S(n)$ pasi m dhe n dallojnë vetëm tek shifra e njësheve. Kështu mund të supozojmë se

$$n = \overline{\cdots x \underbrace{99\cdots9}_{k} a}$$

ku shifra 9 përsëritet k herë, $a \in \{8, 9\}$ dhe x është shifër ≤ 8. Për numrin m kemi

$$m = n + 2 = \overline{\cdots (x+1) \underbrace{00\cdots0}_{k} (a-8)}.$$

Sikur më herët, shifrat e m dhe n pas shifrës në pozitën $k+2$ janë të njejta, prandaj mjafton të krahasojmë $k+2$ shifrat e para. Nëse k është tek, kemi

$$S(n) - S(m) = a + \frac{k-1}{2} \cdot 9 + x - 2 \cdot \left(\frac{k+1}{2} \cdot 9\right) - ((a-8) + x + 1) = -\frac{k+3}{2} + 7$$

që nuk mund të jetë 0 për asnjë numër tek k. Nëse k është çift, kemi

$$S(n) - S(m) = a + \frac{k}{2} \cdot 9 - 2 \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot 9 + x\right) - ((a-8) - 2 \cdot (x+1)) = -\frac{k}{2} \cdot 9 + 10$$

që poashtu nuk mund të jetë 0 për asnjë numër çift k. ▲

Shënim 1. Vlerat $k = 1, 2$ mund të eliminohen shumë më lehtë duke vërejtur se $S(n) \equiv n \pmod 3$, prandaj që të kemi $S(n+k) = S(n)$, patjetër duhet të vlejë $k \equiv 0 \pmod 3$.

Shënim 2. Shembulli $n = 997$ mund të gjendet me llogaritje të ngjashme sikur në zgjidhjen sipër. Për shembull për k çift fitojmë ekuacionin

$$S(n) - S(m) = a + \frac{k}{2} \cdot 9 - 2 \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot 9 + x\right) - ((a-7) - 2 \cdot (x+1)) = -\frac{k}{2} \cdot 9 + 9$$

që është 0 për $k = 2$ dhe cilëndo nga shifrat $a \in \{7, 8, 9\}$. Në fakt, kjo llogaritje tregon se ekzistojnë pafundësisht numra të tillë duke marrur $n = \overline{\cdots x99a}$ ku shifrat pas shifrës x janë të çfarëdoshme, $0 \le x \le 8$ dhe $a \in \{7, 8, 9\}$.

Skema. Pikë të pjesshme:

$k = 1$:

(A1) Shifra e parë duhet të jetë 9 ..... 1 pikë

(A2) Shqyrtimi i formës $n = \overline{\cdots x \underbrace{99\cdots9}_{k}}$ dhe llogaritja e $S(n)$ ose $S(m)$ ose ndryshimit të tyre ... 1 pikë

(A3) Përfundimi që asnjë k nuk e plotëson ekuacionin $S(m) = S(n)$ ..... 1 pikë

$k = 2$:

(A4) Shifra e parë duhet të jetë 8 ose 9 ..... 1 pikë

(A5) Shqyrtimi i formës $n = \overline{\cdots x \underbrace{99\cdots9}_{k} a}$ dhe llogaritja e $S(n)$ ose $S(m)$ ose ndryshimit të tyre .. 1 pikë

(A6) Përfundimi që asnjë k nuk e plotëson ekuacionin $S(m) = S(n)$ ..... 1 pikë

$k = 3$:

(A7) Konstatimi i ndonjë shembulli të numrave që ndryshojnë për 3 ..... 3 pikë

Pikët e mëposhtme janë joaditive me pikët sipër, përveç (A7).

(B1) Tregon që $3 \mid k$ ..... 7 pikë

(B1.1.) Tregon që $3 \mid S(n) - n$ me arsyetim ..... 4 pikë

(B2) Dy numra që dallojnë vetëm në shifrën e njësheve nuk mund të japin të njëjtin rezultat ..... 1 pikë