Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Olimpiada Matematike e Kosovës 2026

Klasa IX

18 Janar 2026

Komente të përgjithshme:

(K1) Çdo zgjidhje e plotë vlerësohet me 10 pikë.

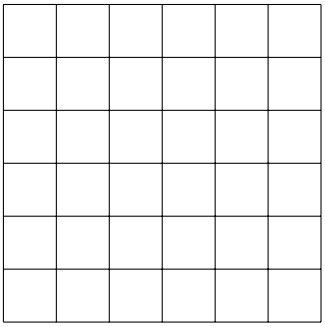
(K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje ..... -1 pikë

(K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim ..... 0 pikë

(K4) Vizatimi i figurës në detyrat e gjeometrisë ..... 0 pikë

(K5) Në skemat e mëposhtme, nënpikët (A$i.j$) (për shembull (A1.2)) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga (Ai) (për shembull (A1)).

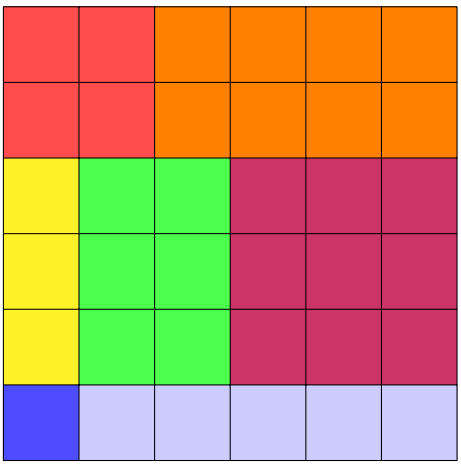
1. Tabela me dimensione 6×6 e përbërë nga katrorë njësi duhet të mbulohet përmes pllakave drejtkëndëshe, brinjët e të cilave përputhen me vijat e tabelës. Pllakat e ndryshme nuk mund të vendosen mbi njëra-tjetrën dhe duhet të kenë syprina të ndryshme. Sa pllaka mund të përdoren më së shumti?



Zgjidhje 1. Tabela ka syprinë 36. Nëse përdorim 9 ose më shumë pllaka, meqë ato duhet të kenë syprina të ndryshme, atëherë syprina totale e tyre do të jetë të paktën $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45 > 36$.

Nëse përdorim 8 pllaka, atëherë syprina minimale e tyre do të jetë $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$. Atëherë duhet të kemi nga një pllakë me secliën nga këto syprina. Por, pllaka me syprinë 7 mund t'i ketë dimensionet vetëm 1×7 ose 7×1 dhe si e tillë nuk mund të vendoset brenda tabelës me dimensione 6×6.

Me 7 pllaka ekziston një mbulim i tabelës në këtë mënyrë:



Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që nuk mund të përdoren më shumë se 7 pllaka ..... 6 pikë

(A1.1) Vërtetimi që nuk mund të përdoren më shumë se 8 pllaka ..... 2 pikë

(A1.2) Tregon që pllaka me syprinë 7 nuk mund të përdoret ..... 1 pikë

(A2) Konstruktimi i një shembulli me 7 pllaka ..... 4 pikë

2. Le të jenë a, b, c, d, e numra natyrorë të tillë që $\text{pmmp}(a, b, c, d, e) > 1$. Prodhimi i tyre është numër çift ndërsa shuma e tyre është numër tek. Sa është vlera më e vogël e mundshme e shprehjes $a+b+c+d+e$?

Shënim. $\text{pmmp}(a, b, c, d, e)$ *është numri më i madh natyror i cili është pjesëtues i të gjithë numrave* a, b, c, d, e.

Zgjidhje. Vërejmë se njëri nga numrat duhet të jetë çift pasi që prodhimi është çift. Pasi që shuma e numrave është tek, atëherë numri i numrave çift duhet të jetë çift. Kjo i bie që të paktën dy nga numrat janë çift. Tani, $\text{pmmp}(a, b, c, d, e)$ nuk mund të jetë 2 pasi atëherë të gjithë numrat do të ishin çift dhe shuma e tyre do të ishte çift. Pra, $\text{pmmp}(a, b, c, d, e) \geq 3$. Në mënyrë që të shuma $a + b + c + d + e$ të jetë sa më e vogël, marrim dy raste:

- $a = b = c = 3$ dhe $d = e = 6$. Në këtë rast kemi $a + b + c + d + e = 3 + 3 + 3 + 6 + 6 = 21$.
- $a = 3$ dhe $b = c = d = e = 6$ që qartazi e ka shumën më të madhe se 21.

Përfundojmë që shuma më e vogël e numrave është 21.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Të paktën dy nga numrat janë çift ..... 2 pikë

(A2) Të paktën njëri nga numrat është tek ..... 1 pikë

(A3) Vërtetimi që vlera minimale e $\text{pmmp}(a, b, c, d, e)$ është 3 ..... 4 pikë

(A4) Konstruktimi ..... 1 pikë

3. Le të jetë $ABCD$ trapez[1] me bazat AB dhe CD. Janë dhënë gjatësitë $AC = 20$, $BD = 15$ dhe lartësia e trapezit është 12. Tregoni që diagonalet e trapezit janë normale (pingule) ndaj njëra-tjetrës.

Zgjidhje. Le të jenë X dhe Y këmbëzat e lartësive prej A dhe B në CD. Qartazi $AX = BY = 12$. Nga Teorema e Pitagorës në $\triangle AXC$ dhe $\triangle BYD$ kemi që $CX = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ dhe $DY = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Tani vërejmë se

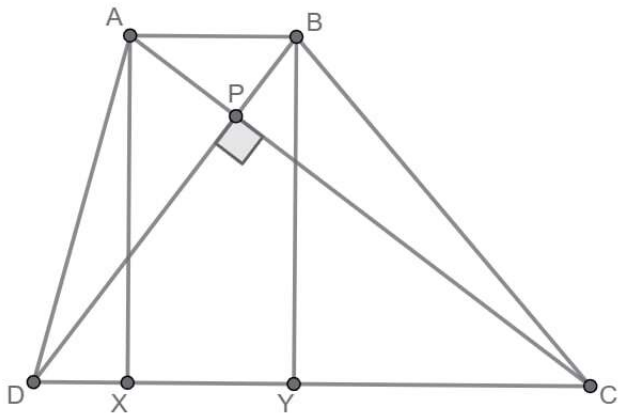
$$\frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} \iff \frac{DY}{AX} = \frac{BY}{CX} = \frac{BD}{AC} \Rightarrow \triangle AXC \sim \triangle DYB$$

nga kriteri BBB. Le të jetë P pikëprerja e AC dhe BD. Duke shfrytëzuar ngjashmërinë kemi

$$\angle CPD = 180^\circ - \angle PCD - \angle PDC = 180^\circ - \angle PCD - \angle CAX = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

çka duhej vërtetuar.

[1] Këndi $\angle BDC$ është i ngushtë.



Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Llogaritja e gjatësive CX ose DY ..... 2 pikë

(A2) Vërtetimi i ngjashmërisë së trekëndëshave ..... 5 pikë

4. Le të jenë a, b numra realë pozitivë. Tregoni që

$$\frac{a^2}{4b} + \frac{b^2}{4a} \geq \frac{a^2+b^2}{(a+1)(b+1)}.$$

Zgjidhje 1. Kemi

$$\frac{a^2}{4b} + \frac{b^2}{4a} = \frac{a^3+b^3}{4ab}.$$

Nga jobarazimi i Koshi-Shvarcit, kemi

$$(a^3+b^3)(a+b) \geq (a^2+b^2)^2,$$

prandaj

$$\frac{a^3+b^3}{4ab} \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{4ab(a+b)}.$$

Kështu, mjafton të tregojmë që

$$\frac{a^2+b^2}{4ab(a+b)} \geq \frac{1}{(a+1)(b+1)} \iff a^3b + b^3a + a^3 + b^3 + a^2 + b^2 \geq 3a^2b + 3b^2a.$$

Jobarazimi i fundit vlen pas mbledhjes së jobarazimeve

$$a^3b + a^3 + b^2 \geq 3a^2b, \qquad b^3a + b^3 + a^2 \geq 3b^2a$$

që vlejnë nga jobarazimi AM-GM.

Zgjidhje 2. Duke shumëzuar jobarazimin me $4ab(a+1)(b+1)$ fitojmë jobarazimin ekuivalent

$$a^4b + a^4 + a^3b + a^3 + b^4a + b^4 + b^3a + b^3 \geq 4a^3b + 4ab^3. \tag{1}$$

Ky jobarazim vlen pas mbledhjes së jobarazimeve

$$a^4b + a^4 + b^3a + a^3 \geq 4a^3b, \qquad b^4a + b^4 + a^3b + b^3 \geq 4b^3a,$$

që vlejnë nga jobarazimi AM-GM.

Shënim. Zgjidhja 2 duket më e thjeshtë, por është e rendësishme që monomet a^3b dhe b^3a mos të zbriten nga të dyja anët e (1), pasi kjo e vështirëson përdorimin e jobarazimit AM-GM me 3 monome.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Përdorimi i jobarazimit të Koshi-Shvarcit për të kufizuar a^3+b^3 me a^2+b^2 dhe $a+b$ ..... 4 pikë

(A2) Përdorimi i jobarazimit $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ pas jobarazimit të Koshi-Shvarcit ..... 2 pikë