

# OLIMPIADA MATEMATIKE E KOSOVËS 2026

EMO TST

21 SHKURT 2026

**Komente të përgjithshme:**

- (K1) Çdo zgjidhje e plotë vlerësohet me 10 pikë.
- (K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje ..... -1 pikë
- (K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim ..... 0 pikë
- (K4) Vizatimi i figurës në detyrën e gjeometrisë ..... 0 pikë
- (K5) Në skemat e mëposhtme, nën-pikët  $(A_{i,j})$  (për shembull  $(A_{1,2})$ ) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga  $(A_i)$  (për shembull  $(A_1)$ ).

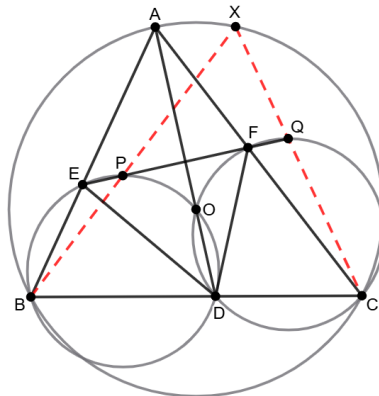
1. Le të jetë  $\triangle ABC$  trekëndësh brinjëndryshëm këndngushtë dhe le të jetë  $O$  qendra e rrethit të jashtëshkruar të tij. Drejtëza  $AO$  pret brinjën  $BC$  në pikën  $D$ . Rrethi  $(BDO)$  pret brinjën  $AB$  sërish në pikën  $E$  dhe rrethi  $(CDO)$  pret brinjën  $AC$  sërish në pikën  $F$ . Drejtëza  $EF$  pret rrethët  $(BDO)$  dhe  $(CDO)$  sërish në pikat  $P$  dhe  $Q$ , përkatësisht. Vërtetoni që drejtëzat  $BP$  dhe  $CQ$  priten në rrethin  $(ABC)$ .

*Shënim.* Me  $(XYZ)$  nënkuptojmë rrethin e jashtëshkruar të trekëndëshit  $\triangle XYZ$ .

**Zgjidhje.** Le të jetë  $X$  pikëprerja e  $BP$  dhe  $CQ$ . Dihet që  $X$  gjendet në rrethin  $(ABC)$  vetëm nëse  $\angle BAC = \angle BXC$ , pra detyra është ekuivalente të tregojmë se shuma e këndeve  $\angle XBC$  dhe  $\angle XCB$  është  $180^\circ - \angle BAC$ . Pra duhet të tregojmë që  $\angle PBD + \angle QCD = 180^\circ - \angle BAC$ . Pasi  $BDOE$  dhe  $CDOF$  janë ciklikë, kemi që

$$\angle PBD + \angle QCD = \angle DEF + \angle DFE = 180^\circ - \angle FDE = 180^\circ - \angle OBA - \angle OCA = 180^\circ - \angle BAC.$$

Pra vërtetuar që  $180^\circ - \angle BAC = \angle PBD + \angle QCD$  që tregon se  $\angle BAC = \angle BXC$ . Përfundojmë që  $ABCX$  është ciklik, pra  $X$  gjendet në rrethin  $(ABC)$ .



**Skema. Pikë të pjesshme:**

- (A1) Vërtetimi që detyra është ekuivalente të tregohet që  $\angle PBD + \angle QCD = 180^\circ - \angle BAC$  ..... 2 pikë
- (A2) Vërtetimi që  $\angle PBD + \angle QCD = 180^\circ - \angle FDE$  ..... 3 pikë
- (A2.1) Vërtetimi që  $\angle PBD = \angle DEF$  ose  $\angle QCD = \angle DFE$  ..... 1 pikë
- (A2.2) Vërtetimi që  $\angle PBD + \angle QCD = \angle DEF + \angle DFE$  ..... 2 pikë
- (A3) Përfundimi që  $\angle FDE = \angle BAC$  ..... 5 pikë
- (A3.1) Vërtetimi që pikat  $B, E, F, C$  i takojnë një rrethi ..... 1 pikë

2. Le të jetë  $n \geq 3$  numër natyror. Në secilin katror njësi të tabelës me dimensione  $n \times n$  vendoset ndonjë numër natyror, në mënyrë të tillë që secili rresht të përmbajë më së shumti tre numra të ndryshëm dhe secila shtyllë të përmbajë më së shumti tre numra të ndryshëm. Më së shumti sa numra të ndryshëm mund të vendosën në tabelë?

**Zgjidhje.** Fillimisht, ekziston vendosja e  $2n + 1$  numrave të ndryshëm në tabelë si vijon.

$2n+1$	1	1		1	1	$n+1$
1	1	1		1	$n$	$2n$
1	1	1		$n-1$	$2n-1$	1
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">•</div> <div style="text-align: center;">•</div> <div style="text-align: center;">•</div> </div>						
1	1	4		1	1	1
1	3	$n+3$		1	1	1
2	$n+2$	1		1	1	1

Supozojmë që ekziston një vendosje me të paktën  $2n + 2$  numra të ndryshëm. Atëherë duhet të ekzistojnë dy rreshta që përmbajnë nga tre numra, të gjithë këta të ndryshëm mes vete (kjo sepse përndryshe, nëse i konsiderojmë vetëm numrat e ndryshëm mes vete, do të kishim më së shumti  $3 + 2 + 2 + \dots + 2 = 2n + 1$  numra të ndryshëm). Tani konsiderojmë shtyllat e tabelës. Secila shtyllë i përmban dy numra të ndryshëm nga këta dy rreshta, që do të thotë që secila mund ta ketë më së shumti edhe një numër të ri. Prandaj, numri maksimal i numrave të ndryshëm është  $n + 6$  (6 nga dy rreshtat dhe nga një për secilën shtyllë). Atëherë duhet të vlejë që  $n + 6 \geq 2n + 2$ , pra  $n \leq 4$ .

Për  $n = 4$ , kemi që numri maksimal është më së shumti  $n + 6 = 10$ . Një konstruktim me 10 numra është si vijon.

1	1	9	10
7	8	6	6
4	5	6	6
1	1	2	3

Ndërkaq, për  $n = 3$ , qartazi numri maksimal është 9.

Prandaj, numri maksimal i kërkuar është 9 për  $n = 3$ , 10 për  $n = 4$  dhe  $2n + 1$  për  $n \geq 5$ .

**Skema. Pikë të pjesshme:**

- (A1) Konstruktimi i shembullit maksimal për  $n \geq 5$  ..... 3 pikë
- (A2) Vërtetimi i kufirit të sipërm  $2n + 1$  për  $n \geq 5$  ..... 5 pikë
  - (A2.1) Vërtetimi që nëse përdoren  $2n + 2$  numra të ndryshëm, ekzistojnë dy rreshta apo shtylla me nga tre numra të ndryshëm ..... 2 pikë
  - (A2.2) Vërtetimi që nëse kemi dy rreshta që së bashku përmbajnë 6 numra të ndryshëm, numri maksimal është më së shumti  $n + 6$  ..... 2 pikë
- (A3) Konstruktimi i shembullit për  $n = 4$  dhe vërtetimi i maksimalitetit ..... 1 pikë

3. Le të jenë  $k$  dhe  $\ell$  numra natyrorë të tillë që  $\text{pmmp}(k, \ell) = 1$ . Gjeni të gjithë numrat natyrorë  $a$  dhe  $b$  të tillë që

$$\text{pmmp}(a^k + b^k - 2, a^\ell + b^\ell - 2) = ab - 1.$$

**Zgjidhje.** Pa humbur nga përgjithësia, supozojmë që  $a \geq b$ . Do të tregojmë që  $b = 1$ . Supozojmë që  $b > 1$ . Atëherë meqë  $ab - 1 \mid a^k + b^k - 2$  në veçanti, kemi

$$ab - 1 \mid b^k(a^k + b^k - 2) = (ab)^k + b^{2k} - 2b^k.$$

Meqë  $ab \equiv 1 \pmod{ab - 1}$  kemi që

$$ab - 1 \mid b^{2k} - 2b^k + 1 = (b^k - 1)^2.$$

Në mënyrë të ngjashme kemi që  $ab - 1 \mid (b^\ell - 1)^2$ . Meqë  $\text{pmmp}(k, \ell) = 1$  kemi

$$ab - 1 \mid \text{pmmp}((b^k - 1)^2, (b^\ell - 1)^2) = (b^{\text{pmmp}(k, \ell)} - 1)^2 = (b - 1)^2.$$

Por meqë  $a \geq b > 1$  kemi që

$$ab - 1 \geq b^2 - 1 > b^2 - 2b + 1 = (b - 1)^2,$$

që bie në kundërshtim me  $ab - 1 \mid (b - 1)^2$ . Prandaj përfundojmë që  $b = 1$ . Vërejmë që  $a = b = 1$  nuk është zgjidhje, pasi  $\text{pmmp}(0, 0)$  nuk është 0 (pasi çdo numër natyror pjesëton 0). Përfundojmë që të gjitha zgjidhjet janë  $(a, 1)$  dhe  $(1, a)$  ku  $a > 1$  është numër natyror, pasi nga  $\text{pmmp}(k, \ell) = 1$  kemi

$$\text{pmmp}(a^k - 1, a^\ell - 1) = a^{\text{pmmp}(k, \ell)} - 1 = a - 1.$$

**Skema. Pikë të pjesshme:**

- (A1) Vërtetimi që  $ab - 1 \mid (b^m - 1)^2$  ..... 4 pikë
  - (A1.1) Vërtetimi që  $a^k + a^{-k} - 2 \equiv 0 \pmod{ab - 1}$  ..... 2 pikë
- (A2) Vërtetimi që  $ab - 1 \mid (b - 1)^2$  ..... 3 pikë
 

*Jo-aditive me pikët sipër:*
- (A3) Arsyetimi që  $a = 1$  ose  $b = 1$  është zgjidhje ..... 1 pikë

4. Gjeni të gjitha funksionet  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  të tillë që për çfarëdo numra realë  $x$  dhe  $y$  vlen

$$f(x + yf(x)) = xf(x^3f(x) + y).$$

**Zgjidhje 1.** Shkruajmë me  $P(x, y)$  relacionin e dhënë. Nga  $P(0, 0)$  kemi  $f(0) = 0$ .

Shqyrtojmë rastin kur ekziston  $a \neq 0$  e tillë që  $f(a) = 0$ . Nga  $P(a, x)$  kemi

$$0 = f(a) = f(a + xf(a)) = af(a^3f(a) + x) = af(x) \Rightarrow af(x) = 0,$$

pra  $f(x) = 0$  për çdo  $x \in \mathbb{R}$ , që është qartazi zgjidhje.

Tani mund të supozojmë se  $f(a) = 0$  atëherë dhe vetëm atëherë kur  $a = 0$ . Nga  $P(x, -x^3f(x))$  për  $x \neq 0$  kemi

$$f(x - x^3f(x)^2) = 0 \Rightarrow x = x^3f(x)^2 \Rightarrow f(x)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Pra për çdo numër real  $x \neq 0$ , kemi  $f(x) = 1/x$  ose  $f(x) = -1/x$ . Në veçanti kemi  $f(-1) = 1$  ose  $f(-1) = -1$ . Nëse  $f(-1) = 1$ , nga  $P(-1, 0)$  kemi  $f(-1) = -f(-1)$ , që nuk është e mundur. Prandaj  $f(-1) = -1$ .

Tutje tregojmë se  $f$  është funksion tek. Nga  $P(-1, x - 1)$  kemi

$$f(-x) = f(-1 + (x - 1)f(-1)) = -f(-f(-1) + x - 1) = -f(x).$$

Tani tregojmë se në fakt  $f(x) = \frac{1}{x}$  për çdo  $x > 0$ . Pasi kemi treguar se  $f$  është tek, kjo mjafton për të përfunduar që  $f(x) = \frac{1}{x}$  për çdo  $x \neq 0$ . Duke shkruar  $x = t^2 > 0$  dhe duke përdorur që  $f(t) = \pm \frac{1}{t}$  dhe që  $f$  është tek, nga  $P(t, 0)$  kemi

$$\pm \frac{1}{t} = f(t) = tf(t^3f(t)) = tf(\pm t^2) = \pm tf(t^2),$$

ku shenja në fillim është e njëjtë me shenjën në fund. Nga kjo përfundojmë që  $f(x) = \frac{1}{x}$  për  $x > 0$ , çka duhej treguar.

Tregojmë se funksioni  $f(x) = \frac{1}{x}$  për  $x \neq 0$  dhe  $f(0) = 0$  është zgjidhje. Nëse  $x = 0$ , atëherë  $P(0, y)$  vlen pasi të dyja anët e barazimit janë të barabarta me 0. Nëse  $x \neq 0$ , atëherë duhet të vlejë

$$f\left(\frac{x^2 + y}{x}\right) = xf(x^2 + y).$$

Nëse  $x^2 + y = 0$ , të dyja anët e barazimit sipër janë të barabarta me 0. Nëse  $x^2 + y \neq 0$ , atëherë barazimi sipër qartazi vlen, pasi  $\frac{x}{x^2 + y} = x \cdot \frac{1}{x^2 + y}$ .

**Zgjidhje 2.** Pasi kemi treguar që  $f(x)^2 = \frac{1}{x^2}$  për  $x \neq 0$  dhe  $f(-1) = -1$  (në rastin  $f \not\equiv 0$ ) sikur në zgjidhjen sipër, nga  $P(x, y - x^3f(x))$  fitojmë

$$f(yf(x)) = xf(y) \tag{1}$$

për çdo  $x, y \in \mathbb{R}$ . Duke fiksuar  $y \neq 0$ , kemi që funksioni  $f$  është injektiv. Meqë  $f(-1) = -1$ ,  $f(1)^2 = 1$  dhe  $f$  është injektiv, kemi  $f(1) = 1$ . Marrim  $y = 1$  në (1) dhe kemi

$$f(f(x)) = x \tag{2}$$

për çdo  $x \in \mathbb{R}$ . Duke zëvendësuar  $y$  me  $f(y)$  në (1) dhe duke përdorur (2), kemi  $f(f(x)f(y)) = xy$  për çdo  $x, y \in \mathbb{R}$ . Prandaj  $f(f(f(x)f(y))) = f(xy)$ , kështu që duke përdorur (2) përsëri kemi  $f(xy) = f(x)f(y)$  për çdo  $x, y \in \mathbb{R}$ . Nga kjo kemi  $f(x^2) \geq 0$  prandaj  $f(x^2) = \frac{1}{x^2}$  për  $x \neq 0$  dhe  $f(-x^2) = f(-1)f(x^2) = -\frac{1}{x^2}$  për  $x \neq 0$ . Përfundojmë që  $f(x) = \frac{1}{x}$  për çdo  $x \neq 0$  dhe  $f(0) = 0$ , që është zgjidhje (siç e kemi treguar në zgjidhjen sipër).

**Skema. Pikë të pjesshme:**

*Pikët (B) dhe (C) nuk janë aditive mes vete. Pika (D) nuk është aditive me asnjë pikë tjetër.*

- (A1) Nëse ekziston  $a \neq 0$  e tillë që  $f(a) = 0$ , atëherë  $f(x) = 0$  për çdo  $x \in \mathbb{R}$  ..... 1 pikë
- (A2) Vërtetimi që  $f(x)^2 = \frac{1}{x^2}$  për  $x \neq 0$  nëse  $f \not\equiv 0$  ..... 1 pikë
- (A3) Vërtetimi që  $f$  është funksion tek ose injektiv ..... 3 pikë
  - (A3.1) Vërtetimi që  $f(-1) = -1$  nëse  $f \not\equiv 0$  ..... 1 pikë
- (B) Vërtetimi që  $f(xy) = f(x)f(y)$  ..... 2 pikë
  - (B.1) Vërtetimi që  $f(f(x)) = x$  ..... 1 pikë
- (C) Vërtetimi që për çdo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  kemi që  $f(x) = \frac{1}{x}$  ose  $f(-x) = -\frac{1}{x}$  ..... 1 pikë
 

*Jo-aditive me pikët sipër:*
- (D) Vërtetimi që  $f(x) = 1/x$  për  $x \neq 0$  dhe  $f(0) = 0$  është zgjidhje ..... 1 pikë