KMS
Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

Olimpiada Matematike e Kosovës 2026

IMO TST - SKEMAT E VLERËSIMIT

14 & 15 Mars 2026

Komente të përgjithshme:

(K1) Zgjidhje e plotë .... 7 pikë

(K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje .... -1 pikë

(K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim .... 0 pikë

(K4) Vizatimi i figurës në detyrat e gjeometrisë .... 0 pikë

(K5) Në skemat e mëposhtme, nënpikët (A$i.j$) (për shembull (A1.2)) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga (Ai) (për shembull (A1)).

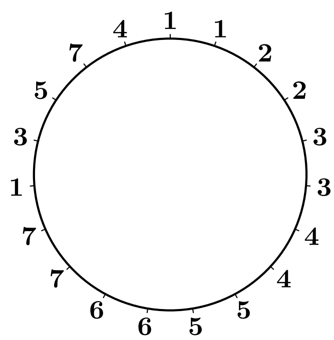
1. Numrat natyrorë $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ janë vendosur në një rreth në këtë renditje sipas drejtimit të akrepave të orës, në mënyrë të tillë që bashkësitë

$$\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{18}, a_{19}\}, \{a_{19}, a_1\}$$

janë të ndryshme mes vete. Të paktën sa numra të ndryshëm janë vendosur në rreth?

Shënim. Bashkësia $\{x, x\}$ është bashkësia një-elementëshe $\{x\}$.

Zgjidhje 1. Supozojmë që kjo mund të arrihet me 6 numra të ndryshëm, për shembull numrat $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Atëherë një numër i caktuar, për shembull numri 1, shfaqet të paktën $\lceil \frac{19}{6} \rceil = 4$ herë. Secili nga këta katër njësha përmbahet në dy bashkësi, $\{x, 1\}$ dhe $\{1, y\}$. Pra kemi 8 bashkësi që përmbajnë numrin 1, e prej këtyre bashkësive vetëm dy mund të jenë të njëjta (kjo ndodh në rastin kur kemi kemi dy numra 1 fqinjë). Pra kemi të paktën 7 bashkësi të ndryshme që përmbajnë numrin 1, por kjo nuk është e mundur sepse ekzistojnvetëm 6 bashkësi të tilla: $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}$. Një vendosje me 7 numra është dhënë më poshtë.



Zgjidhje 2. Tregojmë në një menyrë tjetër që nuk mund të kemi saktësisht 6 numra të ndryshëm. Supozojmë që ky është rasti dhe shqyrtojmë grafin komplet me $\binom{6}{2} + 6 = 21$ brinjë, ku 6 prej tyre janë brinjë ciklike. Secili kulm i grafit ka shkallë saktësisht 7 (secila brinjë ciklike kontribuon 2 në shkallën e kulmit përkatës). Në menyrë që të plotësohet kushti i detyrës, grafi me 6 kulmet dhe brinjët

$$\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{18}, a_{19}\}, \{a_{19}, a_1\}$$

duhet të jetë cikël Eulerian. Nga Teorema e Eulerit, kjo ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur në grafin me 19 brinjë, çdo kulm ka shkallë çift. Por ky graf fitohet nga grafi i plotë duke larguar vetëm 2 nga brinjët, prandaj është e pamundur që të gjitha kulmet të kenë shkallë çift, pasi largimi i dy brinjëve i ndryshon shkallët e më së shumti katër kulmeve në çift.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Shembulli me 7 numra të ndryshëm .... 2 pikë

(A2) Vërtetimi që 6 numra të ndryshëm nuk mjaftojnë .... 5 pikë

Jo-aditive:

(A2.1) Vërtetimi që një numër mund të përsëritet më së shumti 3 herë .... 4 pikë

(A2.2) Konstatimi që ekziston një numër që shfaqet të paktën 4 herë .... 1 pikë

(A2.3) Vërtetimi që vetëm 5 bashkësi të një numri mund të arrihen .... 2 pikë

(A2.4) Reduktimi në rastin ku numrat fqinjë janë të ndryshëm .... 1 pikë

2. Është dhënë trekëndëshi këndngushtë brinjëndryshëm $\triangle ABC$ dhe pika D në brinjën AB. Le të jetë E pikë në brinjën AC, e tillë që drejtëzat DE dhe BC janë paralele. Supozojmë që ekzistojnë pikat R dhe S në brinjën BC ashtu që $\angle BRD = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle CSE$. Le të jetë ω_1 rrethi që kalon nëpër pikat B, D, R dhe ω_2 rrethi që kalon nëpër pikat C, S, E. Supozojmë që rrathët ω_1 dhe ω_2 priten në dy pika të ndryshme P dhe Q.

Tregoni që kur pika D lëviz nëpër brinjën AB duke u plotësuar kushtet e mësipërme, atëherë rrethi i jashtëshkruar i trekëndëshit $\triangle APQ$ kalon nëpër një pikë fikse të ndryshme nga A.

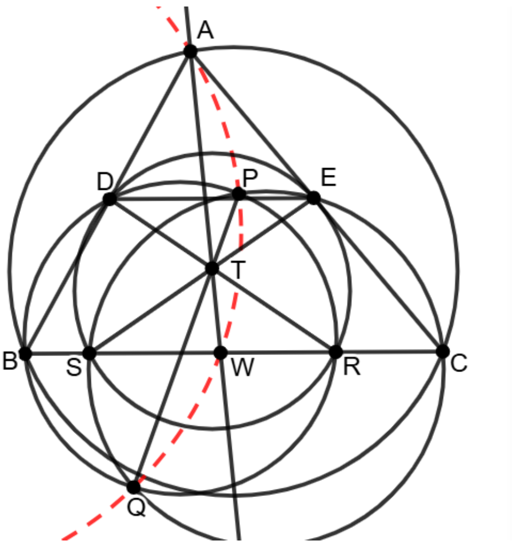
Zgjidhje. Meqë $DE \parallel BC$ kjo do të thotë se $\angle DRS = \angle RDE$. Mirëpo

$$\angle DRS = \angle DRB = \frac{\angle BAC}{2} = \angle ESC = \angle ESR,$$

pra $\angle RDE = \angle DRS = \angle RSE$ që na jep se katërkëndëshi $DERS$ është ciklik. Nga teorema e boshteve radikale në rrathët ω_1, ω_2 dhe $(DERS)$, prerja e drejtëzave DR dhe ES ndodhet në drejtëzën PQ dhe këtë prerje e shkruajmë me T. Tutje kemi

$$\angle DTE = 180^\circ - \angle TDE - \angle TED = 180^\circ - \angle BAC,$$

prandaj $ADTE$ është ciklik. Kjo do të thotë se $\angle TAD = \angle TED = \frac{\angle BAC}{2}$, prej nga rrjedh që pika T ndodhet në simetralen e këndit BAC. Përkufizojmë $W = AT \cap BC$. Pastaj qartazi kemi $\angle WRD = \angle WAD$ prandaj $WRAD$ është ciklik. Nga kjo kemi $AT \times WT = DT \times RT = PT \times QT$, prandaj $APWQ$ është ciklik, që do të thotë se (APQ) kalon nëpër W, e cila është pikë fikse e ndryshme prej A.



Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që DR dhe ES priten në PQ .... 1 pikë

(A2) Vërtetimi që DR dhe ES priten në simetralen e këndit BAC .... 2 pikë

(A3) Pohimi që pika fikse që ku kalon (APQ) është pikëprerja e simetrales të këndit BAC me segmentin BC .... 1 pikë

(A4) Vërtetimi që katërkëndëshi $ADWR$ ose $AEWS$ është ciklik .... 1 pikë

3. Gjeni të gjitha polinomet $Q(x)$ me koeficientë numra të plotë për të cilët ekziston ndonjë numër i plotë $\ell \neq 0$ i tillë që për çdo numër të thjeshtë p kemi

$$p \mid Q(1)Q(2)\cdots Q(p-1)+\ell.$$

Zgjidhje. Qartazi Q nuk është polinomi 0, pasi pastaj $p \mid \ell$ për çdo numër të thjeshtë p, mirëpo $\ell \neq 0$. Shkruajmë $Q(x) = x^k R(x)$ ku $k \geq 0$ është numri më i madh i plotë i mundshëm dhe $R(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$ është polinom i tillë që $R(0) = a_0 \neq 0$. Nga kushti i detyrës kemi që

$$p \mid ((p-1)!)^k R(1)R(2)\cdots R(p-1)+\ell.$$

Nga Teorema e Wilson-it vlen $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, prandaj

$$R(1)\cdots R(p-1) \equiv (-1)^{k+1}\ell \pmod p.$$

Nëse polinomi R nuk është konstant, atëherë nga Teorema e Schur-it kemi që ekzistojnë pafundësisht numra të thjeshtë p të tillë që $R(n) \equiv 0 \pmod p$ për ndonjë numër natyror n. Për $p > |\ell|$ kemi $(-1)^{k+1}\ell \not\equiv 0 \pmod p$, prandaj $R(n) \not\equiv 0 \pmod p$ për $1 \leq n \leq p-1$. Kështu për këta numra të thjeshtë patjetër duhet të kemi $p \mid R(0) = a_0$. Nga kjo kemi $a_0 = 0$ që bie në kundërshtim me $R(0) = a_0 \neq 0$. Përfundojmë që polinomi R është konstant, prandaj $Q(x) = a_0 x^k$ për ndonjë numër të plotë $a_0 \neq 0$ dhe $k \geq 0$. Nga kushti i detyrës për ndonjë numër të thjeshtë $p > \max\{|a_0|, |\ell|\}$, duke përdorur Teoremën e vogël të Fermat-it $a_0^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ dhe përsëri Teoremën e Wilsonit $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, kemi

$$a_0^{p-1}((p-1)!)^k + \ell \equiv (-1)^k + \ell \equiv 0 \pmod p$$

për çdo numër të thjeshtë $p > \max\{|a_0|, |\ell|\}$, prandaj $\ell = \pm 1$. Nëse ekziston ndonjë numër i thjeshtë p_0 i tillë që $p_0 \mid a_0$, atëherë nga kushti i detyrës për $p = p_0$ kemi

$$a_0^{p-1}((p-1)!)^k \pm 1 \equiv \pm 1 \equiv 0 \pmod{p_0},$$

që nuk është e mundur. Prandaj $a_0 = \pm 1$ poashtu. Përfundojmë duke përdorur Teoremën e Wilsonit që të gjitha zgjidhjet janë $Q(x) = x^k$ për të cilën $\ell = (-1)^{k+1}$ dhe $Q(x) = -x^k$ për të cilën $\ell = -1$, ku $k \geq 0$ është numër i plotë.

Skema. *Jo-aditive:*

(A1) Vërtetimi që polinomi x e pjesëton polinomin $Q(x)$ .... 3 pikë

(A1.1) Vërtetimi që $p \mid Q(p)$ për pafundësisht numra të thjeshtë p .... 2 pikë

(A2) Vërtetimi që $Q(x) = a_0 x^k$ për ndonjë numër të plotë $a_0 \neq 0$ dhe $k \geq 1$ .... 4 pikë

(A3) Vërtetimi që $Q(x) = a_0 x^k$ për ndonjë numër të plotë $a_0 \neq 0$, $k \geq 0$ dhe $\ell = \pm 1$ .... 5 pikë

(A4) Vërtetimi që $Q(x) = \pm x^k$ .... 6 pikë

(A4) Vërtetimi që $Q(x) = x^k$ ose $Q(x) = -x^k$ është zgjidhje për çdo $k \geq 1$ .... 1 pikë

4. Le të jetë $\mathbb{N}$ bashkësia e numrave natyrorë dhe $\mathbb{R}^+$ bashkësia e numrave realë pozitivë. Gjeni të gjithë funksionet $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ të tillë që vlejnë kushtet vijuese njëkohësisht:

(i) Për çfarëdo numra natyrorë $a \leqslant b \leqslant c$ që formojnë varg aritmetik, kemi që numrat $f(a) \leqslant f(b) \leqslant f(c)$ formojnë varg gjeometrik;

(ii) Për çfarëdo numra natyrorë $a \leqslant b \leqslant c$ që formojnë varg gjeometrik, kemi që numrat $f(a) \leqslant f(b) \leqslant f(c)$ formojnë varg aritmetik.

Shënim. Një varg themi që është *aritmetik* nëse ndryshimi i cilitdo term të vargut me termin paraprak është konstant. Një varg themi që është *gjeometrik* nëse raporti i cilitdo term me termin paraprak është konstant.

Zgjidhje 1. Tregojmë që të gjitha zgjidhjet janë funksionet konstante pozitive. Meqë për çdo numër natyror n numrat $n \le n+1 \le n+2$ janë varg aritmetik, kemi që $f(n) \le f(n+1) \le f(n+2)$ është varg gjeometrik, prandaj $f(n+2)/f(n+1) = f(n+1)/f(n)$. Pasi kjo vlen për çdo numër natyror, kemi që vargu $f(n+1)/f(n)$ është konstant, kështu që ekzistojnë konstantet pozitive d dhe r të tilla që $f(n) = d \cdot r^{n-1}$ për çdo numër natyror n. Meqë f duhet të jetë rritës, kemi $r \ge 1$.

Meqë $1, 2, 4$ formojnë varg gjeometrik, kemi që $f(1) \leqslant f(2) \leqslant f(4)$ formojnë varg aritmetik, prandaj

$$f(1) + f(4) = 2f(2) \Rightarrow d + d \cdot r^3 = 2d \cdot r \Rightarrow r^3 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2 + r - 1) = 0,$$

nga kemi $r = 1$ ose $r^2 + r = 1$. Mirëpo për $r \ge 1$ qartazi kemi $r^2 + r \ge 2 > 1$, prandaj $r = 1$, nga kemi qe $f(n)$ është konstant dhe qartazi çdo funksion konstant pozitiv e plotëson kushtin.

Zgjidhje 2. Nga $f(1) \le f(2) \le f(3)$ në varg gjeometrik kemi $f(1)f(3) = f(2)^2$. Ngjashëm kemi $f(2)f(4) = f(3)^2$. Nga $f(1) \le f(2) \le f(4)$ në varg aritmetik kemi $f(1) + f(4) = 2f(2)$. Le të jetë $f(2)/f(1) = r$. Duke zgjidhur këtë sistem sipas $f(1)$ dhe r kemi

$$f(4) = f(1)r^3, f(3) = f(1)r^2 \text{ dhe } f(2) = f(1)r.$$

Nga ekuacioni $f(1) + f(4) = 2f(2)$ kemi

$$f(1) + f(1)r^3 = 2f(1)r^2 \implies r^3 - 2r + 1 = 0 \implies (r-1)(r^2 + r - 1) = 0.$$

Meqë $f(1) \le f(2)$ kemi $r \ge 1$, mirëpo sikur në zgjidhjen sipër përfundojmë që $r = 1$, prandaj $f(1) = f(2)$. Mirëpo tani vargu gjeometrik $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le \cdots$ është konstant, dhe të gjitha vargjet e tilla e plotësojnë kushtin.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që $f(n) = d \cdot r^{n-1}$ për $r \ge 1$ .... 3 pikë

(A1.1) Vërtetimi që $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ është konstant .... 1 pikë

(A1.2) Vërtetimi që $f(n) = d \cdot r^{n-1}$ .... 2 pikë

(A2) Vërtetimi që $r = 1$ ose $r^2 + r = 1$ .... 2 pikë

Jo-aditive me pikët sipër:

(B1) Vërtetimi që $f(1) = f(2)$ .... 3 pikë

5. Për një numër natyror të përbërë n, le të jetë $w(n)$ numri më i madh natyror që nuk është relativisht i thjeshtë me n dhe është më i vogël se n.

(a) Gjeni të gjithë numrat natyrorë çift që mund të shkruhen si $n + w(n)$ për ndonjë numër natyror të përbërë n.

(b) Tregoni që për çfarëdo 2026 numra natyrorë të njëpasnjëshëm, të paktën njëri prej tyre është numër i përbërë tek i tillë që mund të shkruhet si $n + w(n)$ në së paku dy mënyra të ndryshme.

Zgjidhje. Së pari kemi $w(n) = n - p$ ku $p = p(n)$ është pjesëtuesi i thjeshtë më i vogël i n, sepse përndryshe $\text{pmmp}(n, n - w(n)) > 1$ por është e pamundur që numri $n - w(n)$ të jetë më i vogël se p. Pra kemi

$$n + w(n) = 2n - p = p\left(2\frac{n}{p} - 1\right)$$

ku $p = p(n)$.

(a) Tani nëse M është çift dhe $M = p\left(2\frac{n}{p} - 1\right)$ për ndonjë numër të përbërë n, atëherë $p = 2$ dhe $4 \nmid M$, pasi numri $2\frac{n}{p} - 1$ është tek. Çdo numër i tillë çift mund të shkruhet duke marrur $n = (M + 2)/2$, pra

$$M = 2\left(2\frac{\frac{M+2}{2}}{2} - 1\right).$$

(b) Supozojmë që $n + w(n) = m + w(m) = N$ për ndonjë numër të përbërë tek N. Le të jetë p pjesëtuesi i thjeshtë më i vogël i numrit n dhe q pjesëtuesi i thjeshtë më i vogël i numrit m. Atëherë kemi

$$p\left(2\frac{n}{p} - 1\right) = q\left(2\frac{m}{q} - 1\right) = N.$$

Pra në veçanti kemi $pq \mid N$, prandaj nëse shkruajmë $N = pqt$ për ndonjë numër tek t, kemi

$$n = \frac{p(qt + 1)}{2} \text{ dhe } m = \frac{q(pt + 1)}{2}.$$

Tani marrim $p = 3, q = 7$ (me vetinë që $pt + 1 \equiv qt + 1 \equiv 2 \pmod 4$ në menyrë që numrat n dhe m të jenë tek) dhe dëshirojmë të zgjedhim pafundësisht numra t të tillë që pjesëtuesi më i vogël i numrit n është 3 dhe pjesëtuesi më i vogël i numrit m është 7. Për këtë mjafton të marrim t të tillë që

$$7t + 1 \equiv 3t + 1 \equiv 2 \pmod 4 \text{ dhe } 3t + 1 \equiv 1 \pmod 5,$$

pra

$$t \equiv 3 \pmod 4 \text{ dhe } t \equiv 0 \pmod 5.$$

Të gjithë numrat e tillë t janë të formës $t = 20k + 15$, prandaj mjafton të marrim

$$N = pqt = 21(20k + 15) = 420k + 315$$

ku $k \geq 0$ është numër i plotë. Qartazi N është numër tek dhe numra të tillë kemi në secilin interval prej 2026 numrash të njëpasnjëshëm.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Konstatimi që $w(n) = n - p(n)$ .... 1 pikë

(A2) Vërtetimi që nëse $M = n + w(n)$ dhe M çift, atëherë $4 \nmid M$ .... 1 pikë

(A3) Konstruktimi për numrat çift $M \equiv 2 \pmod 4$ .... 1 pikë

(A4) Konstruktimi i numrave tek në secilin interval prej 2026 numrash të njëpasnjëshëm .... 4 pikë

Jo-aditive:

(A4.1) Konstatimi që $pq \mid N$ dhe $n = (N + p)/2, m = (N + q)/2$ .... 1 pikë

(A4.2) Konstatimi që $2(n - m) = p - q$ .... 1 pikë

(A4.3) Konstatimi që nëse $n + \omega(n) = m + \omega(m) = N$ për N tek, atëherë $p \equiv q \pmod 4$ .... 2 pikë

6. Në secilin katror njësi të një tabele me dimensione $n \times n$, Ana vendos një nga numrat $1, 2, \ldots, n^2$ në ndonjë renditje, duke përdorur secilin numër saktësisht një herë. Në secilin hap, Beni zgjedh një katror njësi. Ana pastaj ia lexon Benit në ndonjë renditje të rëndomtë të gjithë numrat në rreshtin dhe shtyllën që përmban katrorin e zgjedhur nga Beni, duke lexuar numrin në atë katror vetëm një herë. Sa është numri më i vogël i hapave që i duhen Benit në menyrë që të mund të përcaktojë saktësisht se cili numër është në secilin katror njësi të tabelës?

Zgjidhje. Riformulojmë problemin si vijon. Në vend që Beni të zgjedhë një katror njësi, themi se Beni vendos një top shahu (tani e tutje do t'i referohemi si top) në një katror njësi. Topi sulmon të gjithë katrorët në rreshtin dhe kolonën e tij, duke përfshirë katrorin e vet dhe katrorët që mund të jenë të bllokuar nga topa të tjerë. Vërejmë se renditja e zgjedhjes së katrorëve nuk është e rëndësishme, prandaj mund të supozojmë që Beni i vendos topat në çfarëdo renditje.

Lemë. *Numrat në tabelë mund të përcaktohen atëherë dhe vetëm atëherë kur çdo katror sulmohet nga një bashkësi unike topash.*

Vërtetim. Nëse dy katrorë sulmohen nga e njëjta bashkësi topash, atëherë numrat e tyre do të lexohen vetëm kur të vendosen ata topa dhe është e pamundur të përcaktohet cili numër i përket cilit prej këtyre dy katrorëve. Anasjelltas, nëse çdo katror sulmohet nga një bashkësi unike topash, atëherë për çdo katror ekziston një numër unik që lexohet kur vendosen topat që e sulmojnë atë dhe që nuk lexohet për asnjë katror tjetër. □

Një vendosje e tillë mund të arrihet duke vendosur $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ topat në katrorët e shënjuar si vijon.

×								
	×							
		×						
			×					
				×				
			×		×			
		×				×		
	×						×	
×								×

Përdorim Lemën për të treguar se kjo vendosje funksionon. Vëreni se nëse një katror sulmohet nga një bashkësi prej tre ose më shumë topash që nuk ndodhen në të njëjtin rresht ose kolonë, atëherë asnjë katror tjetër nuk mund të sulmohet nga po ajo bashkësi topash. Prandaj, na mbetet të shqyrtojmë vetëm katrorët në diagonalen kryesore dhe në kuadrantin e sipërm djathtas. Për të gjithë këta katrorë është e lehtë të shihet se ata kanë një bashkësi unike topash nga të cilët sulmohen.

Tani tregojmë se ky është numri minimal i topave të nevojshëm. Është e lehtë të shihet se kjo vlen për $n = 1$ dhe $n = 2$. Për $n \geq 3$, le të supozojmë se kemi një vendosje të vlefshme topash. Supozojmë se ka një rresht pa topa. Atëherë të gjithë rreshtat e tjerë do të duhej të përmbanin të paktën dy topa, sepse nëse ndonjë rresht do të përmbante vetëm një, atëherë katrori i atij topi, së bashku me katrorin në të njejtën kolonë në rreshtin bosh, do të sulmoheshin nga e njëjta bashkësi topash. Prandaj numri i topave në tabelë do të ishte të paktën $2(n-1) \geq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ për $n \geq 3$. Përfundojmë se të gjithë rreshtat duhet të përmbajnë topa, dhe e njëjta gjë vlen për kolonat nga simetria.

Le të jetë R_i bashkësia e topave të vendosur në rreshtin i dhe le të jetë C_j bashkësia e topave të vendosur në kolonën j. Nga Lema, bashkësitë $S_{i,j} = R_i \cup C_j$ duhet të jenë të ndryshme. Le të jetë I bashkësia e atyre $1 \leq i \leq n$ të tillë që $|R_i| = 1$, dhe le të jetë J bashkësia e atyre $1 \leq j \leq n$ të tillë që $|C_j| = 1$. Meqenëse çdo rresht dhe çdo kolonë ka të paktën 1 top dhe gjithsej kemi m topa për t'i vendosur, kemi $|I| \geq n - (m - n) = 2n - m$ dhe ngjashëm $|J| \geq 2n - m$.

Le të jetë K numri i topave që janë të vetëm në rreshtin e tyre, ashtu edhe në kolonën e tyre. Nëse kemi dy rreshta të ndryshëm i_1 dhe i_2 të tillë që në secilin prej tyre ka vetëm një top, atëherë kolonat përkatëse j_1, j_2 janë gjithashtu të ndryshme. Kjo vlen sepse përndryshe (nëse $j_1 = j_2 = j$) do të kishim $S_{i_1,j} = R_{i_1} \cup C_j = R_{i_2} \cup C_j = S_{i_2,j}$, në kundërshtim me Lemën. Në mënyrë të ngjashme, nëse kemi dy kolona të ndryshme j_1 dhe j_2 të tilla që në secilën prej tyre ka vetëm një top, atëherë rreshtat përkatës janë gjithashtu të ndryshëm. Nga kjo rrjedh se

$$K = |I \cap J| = |I| + |J| - |I \cup J| \geq 2(2n - m) - n = 3n - 2m. \qquad (1)$$

Së fundi, tregojmë se $K \leq 1$. Nëse kemi dy topa r, r' që janë të vetëm si në rreshtat e tyre i_1, i_2, ashtu edhe në kolonat e tyre j_1, j_2, përkatësisht, atëherë kemi $S_{i_1,j_2} = \{r, r'\} = S_{i_2,j_1}$, në kundërshtim me Lemën.

Përfundojmë nga (1) se $3n - 2m \leq 1$, që është ekuivalente me $m \geq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor = n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, çka duhej vërtetuar.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ hapa mjaftojnë .... 2 pikë

(A1.1) Konstruktimi i zgjedhjes së katrorëve pa arsyetim ose me arsyetim jo të plotë .... 1 pikë

(A2) Vërtetimi që duhen të paktën $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ hapa .... 5 pikë

(A2.1) Vërtetimi që çdo rresht duhet të ketë të paktën një top në vendosjen minimale .... 1 pikë