Olimpiada Matematike Kosovë - Shqipëri 2026

Klasa VII-VIII

28 Qershor 2026

Komente të përgjithshme:

(K1) Çdo zgjidhje e plotë vlerësohet me 15 pikë.

(K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje .... -1 pikë

(K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim .... 0 pikë

(K4) Vizatimi i figurës në detyrat e gjeometrisë .... 0 pikë

(K5) Në skemat e mëposhtme, nënpikët (A$i.j$) (për shembull (A1.2)) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga (Ai) (për shembull (A1)).

1. Arbri zgjodhi disa numra natyrorë. Pastaj, ai shënoi në fletë prodhimin e çdo dy prej tyre. Ai vërejti se të gjithë numrat e shënuar e kanë shifrën e fundit të ndryshme. Më së shumti sa numra ka mundur t'i zgjedhë Arbri në fillim?

Zgjidhje. Supozojmë që Arbri zgjodhi 5 numra. Atëherë kemi $\binom{5}{2} = 10$ numra të shënuar në fletë. Meqë të gjithë kanë shifrën e fundit të ndryshme, për secilën shifër $0, 1, 2, \ldots, 9$, ekziston një numër në fletë me atë shifër të fundit. Pra, kemi një prodhim me që përfundon me 0 dhe një prodhim që përfundon me 5. Kjo do të thotë që njëri nga numrat e zgjedhur nga Arbri është shumëfish i numrit 5. Prodhimi i këtij numri me katër numrat tjerë jep katër prodhime që janë shumëfish i numrit 5, por ne kemi vetëm dy të tillë.

Është e mundur që Arbri të ketë zgjedhur 4 numra, për shembull numrat $1, 2, 3, 7$. Këta numra japin prodhimet 2, 3, 6, 7, 14 dhe 21.

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Vërtetimi që Arbri nuk mund të ketë zgjedhur më shumë se 4 numra .... 11 pikë

((A1.1) dhe (A1.4) nuk janë aditive me pikat (A1.2) dhe (A1.3))

(A1.1) Vërtetimi që nuk mund t'i kemi më shumë se 5 numra .... 2 pikë

(A1.2) Vërtetimi që nëse kemi 5 numra, çdo shifër paraqitet si shifër e fundit .... 3 pikë

(A1.2) Vërtetimi që njëri prej numrave është shumëfish i 5 .... 2 pikë

(A1.4) Vërtetimi që njëri prej numrave është numër çift .... 2 pikë

(A2) Shembulli dhe konstatimi që Arbri mund t'i ketë zgjedhur 4 numra .... 4 pikë

2. Nëntë nga numrat $1, 2, 3, \ldots 15$ do të zgjedhen dhe do të vendosen në katrorët e tabelës me dimensione 3×3. Pas vendosjes, nëse një numër është sa shuma e dy numrave tjerë në rreshtin e tij ose sa shuma e dy numrave tjerë në shtyllën e tij, katrori i tij ngjyroset me të kuqe. Sa katrorë mund të ngjyrosen me të kuqe më së shumti?

Zgjidhje. Në secilin rresht vetëm njëri numër mund të jetë shumë e dy të tjerve dhe e njëjta vlen edhe për shtyllat. Prandaj nuk mund të kemi më shumë se $3 + 3 = 6$ katrorë të kuq. Tani konsiderojmë numrin më të madh në tabelë. Në rreshtin dhe shtyllën e tij, vetëm ai katror mund të jetë i kuq. Prandaj kemi më së shumti $6 - 1 = 5$ katrorë të kuq në tabelë. Një konfiguracion me 5 katrorë të kuq jepet në vijim.

8	9	1
2	12	14
6	3	15

Skema. Pikë të pjesshme:

(A1) Shembulli me 5 katrorë të ngjyrosur **(6p)**

(A1) Vërtetimi që nuk mund të kemi më shumë se 5 katrorë të ngjyrosur **(9p)**

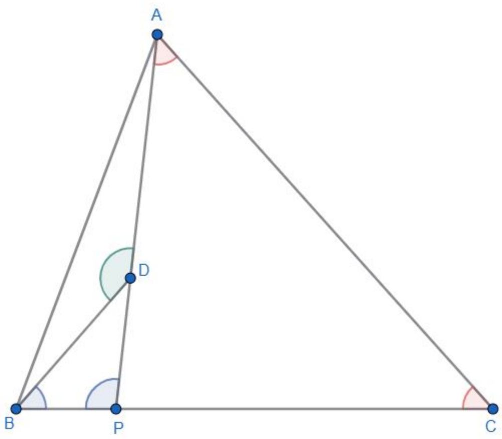
(A1.1) Arsyetimi që nuk mund të kemi më shumë se 6 katrorë të ngjyrosur **(2p)**

3. Është dhënë $\triangle ABC$ dhe D një pikë brenda trekëndëshit e tillë që

$$\frac{\angle ADB - \angle DBC}{2} = \angle ACB.$$

Vërtetoni që $BC > AD + DB$.

Zgjidhje. Le të jetë P pikëprerja e drejëzave AD dhe BC. Vërejmë se nga kushti $2\angle ACB + \angle DBC = \angle ADB = \angle DBP + \angle DPB = \angle DBC + \angle DAC + \angle ACB \Rightarrow \angle ACB = \angle DAC = \angle PAC \Rightarrow PA = PC$. Tani përdorim pabarazimin e trekëndëshit në $\triangle PBD$ dhe kemi $BC = BP + PC = BP + PA = BP + PD + DA > BD + DA$.



Skema. Pikë të pjesshme:

Pika (A3) nuk është aditive me pikët tjera

(A1) Vërtetimi që $\angle DAC = \angle ACB$ .... 5 pikë

(A2) Vërtetimi që $PA = PC$ .... 2 pikë

(A3) Vërtetimi që $\angle BPA = 2\angle ACB$ .... 6 pikë

4. Le të jenë x_i $(1 \leq i \leq 100)$ numra natyrorë të tillë që

$$100(x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}) > x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{100}^2.$$

Supozojmë që k prej tyre janë më të mëdhenjë se 100. Gjeni vlerën më të madhe të mundshme të k.

Zgjidhje. Kemi

$$(x_1^2 - 100x_1) + (x_2^2 - 100x_2) + \ldots + (x_{100}^2 - 100x_{100}) < 0$$
$$(x_1^2 - 100x_1 + 50^2) + (x_2^2 - 100x_2 + 50^2) + \ldots + (x_{100}^2 - 100x_{100} + 50^2) < 100 \cdot 50^2$$
$$(x_1 - 50)^2 + (x_2 - 50)^2 + \ldots + (x_{100} - 50)^2 < 250000$$

Pa humbur përgjithësimin mund të supozojmë që $x_1, x_2, \ldots, x_k > 100$. Atëherë

$$(x_i - 50)^2 \geq (101 - 50)^2 = 51^2 \quad 1 \leq (i \leq k).$$

Nga kjo rrjedh që

$$51^2 k \leq 250000.$$

Pas pjestimit vërejmë që

$$k \leq \frac{250000}{51^2} < 97.$$

Për $k = 96$, mjafton të marrim $x_i = 101$ për $1 \leq i \leq 96$ dhe $x_{97} = x_{98} = x_{99} = x_{100} = 50$. Prandaj, vlera më e madhe e mundshme e k është 96.

Skema. Pikë të pjesshme:

- (A1) Vërtetimi që $k < 97$ .... 12 pikë
  - (A1.1) Transformimi i jobarazimit duke formuar katrorët e plotë .... 6 pikë
  - (A1.2) Vërtetimi që $51^2 k \leq 250000$ .... 5 pikë
- (A2) Shembulli për $k = 96$ .... 5 pikë