Kosovo and Albania Mathematical Olympiad

KAMO

Olimpiada Matematike Kosovë - Shqipëri 2026

Klasa IX

28 Qershor 2026

Komente të përgjithshme:

(K1) Çdo zgjidhje e plotë vlerësohet me 15 pikë.

(K2) Gabim i vogël në arsyetim apo llogaritje .... -1 pikë

(K3) Rezultati i saktë pa ndonjë arsyetim .... 0 pikë

(K4) Vizatimi i figurës në detyrat e gjeometrisë .... 0 pikë

(K5) Në skemat e mëposhtme, nënpikët (A$i.j$) (për shembull (A1.2)) janë pikë të pjesshme që mund t'i fitojë nxënësi nëse nuk ka fituar të gjitha pikët nga (Ai) (për shembull (A1)).

1. Sa numra natyrorë të njëspasnjëshëm mund të kemi më së shumti, të tillë që secili nga ta mund të shënohet si prodhim i saktësisht dy numrave të thjeshtë?

Zgjidhje: Supozojmë që kemi 4 numra të tillë. Atëherë dy nga ta janë çift. Ata mund t'i shënojmë si $2p$ dhe $2q$, ku supozojmë që $2p < 2q$. Meqë janë numra çift të njëpasnjëshëm, atëherë $q = p + 1$. Tani kemi dy numra të thjeshtë të njëpasnjëshëm, prandaj e vetmja mundësi është $p = 2$ dhe $q = 3$. Atëherë kemi numrat 4 dhe 6, që do të thotë që kemi edhe numrin 5, por 5 nuk ësht prodhim i dy numrave të thjeshtë.

Për 3 numra mund të marrim $33 = 3 \cdot 11$, $34 = 2 \cdot 17$ dhe $35 = 5 \cdot 7$.

Skema. Pikë të pjesshme:

(Pikët nën A dhe nën B nuk janë aditive.)

(A1) Vërtetimi që nuk mund t'i kemi më shumë se 3 numra .... 10 pikë

(A1.1) Konstatimi që mes 4 numrave të njëpasnjëshëm kemi dy numra çift .... 3 pikë

(A1.2) Vërtëtimi që nuk mund t'i kemi dy numra çift të njëpasnjëshëm .... 7 pikë

(B1) Arsyetimi që mes 4 numrave të njëpasnjëshëm kemi një shumëfish të numrit 4 .... 4 pikë

(B2) Arsyetimi që ai numër duhet të jetë 4 .... 3 pikë

(C1) Shembulli me 3 numra .... 5 pikë

2. Është dhënë trekëndëshi $\triangle ABC$. Le të jenë D, E pika në brinjën BC, F një pikë në brinjën AC dhe G një pikë në brinjën AB, të tilla që $DEFG$ është katror. Nëse $S_{AGF} = S_{BGD} + S_{CEF}$, gjeni me vërtetim $\dfrac{S_{AGF}}{S_{BGFC}}$.

Zgjidhje. Le të jetë x gjatësia e brinjës së katrorit $DEFG$ dhe y gjatësia e segmentit BD dhe z gjatësia e segmentit CE. Le të jetë h gjatësia e lartësisë nga A në GF. Nga kushti kemi $\dfrac{xh}{2} = \dfrac{xy}{2} + \dfrac{xz}{2} \Rightarrow h = y + z$. Tani, nga Teorema e Talesit, pasi që $GF \parallel BC$ kemi që $\dfrac{h}{h+x} = \dfrac{x}{x+y+z} = \dfrac{x}{x+h} \Rightarrow h = x$. Tani

$$\frac{S_{AGF}}{S_{BGFC}} = \frac{\frac{xh}{2}}{\frac{x+x+y+z}{2}x} = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Skema. Pikë të pjesshme:

(Pikët nën A, nën B dhe nën C nuk janë aditive mes vete.)

(A1) Vërtetim që $h = y + z$ .... 5 pikë

(A2) Vërtetimi që $h = x$ .... 3 pikë

(B1) Vërtetimi që trekëndëshi i formuar nga bashkimi i $\triangle BGD$ dhe $\triangle CFE$ është i ngjashëm me $\triangle AGF$ .... 7 pikë

(B2) Vërtetimi i kongruencës së atyre trekëndëshave .... 5 pikë

(C1) Reduktimi i problemit në llogaritjen e BC përmes një ekuacioni kuadratik sipas brinjës BC . 8 pikë

3. Gjeni të gjitha treshet e numrave natyrorë (a, b, c) të tilla që të tre numrat

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a} + \frac{b}{c}, \quad \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$$

janë numra natyrorë.

Zgjidhje. Pa humbur përgjithësimin mund të supozojmë që $a \leq b \leq c$. Atëherë kemi që

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \leq 2,$$

prandaj $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \in \{1, 2\}$.

Rasti 1. $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 2$.

Mosbarazimet kthehen në barazime, nga kemi që $a = b = c$, që qartazi është zgjidhje e detyrës. Pra, një treshe e tillë është $(a, b, c) = (k, k, k)$ për çdo numër natyror k.

Rasti 2. $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1$.

Atëherë kemi $a = \frac{bc}{b+c}$, prandaj

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{c} = \frac{b+c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{2b}{c} + 1$$

është numër natyror, nga kemi që $\frac{2b}{c}$ është numër natyror. Meqë $\frac{2b}{c} \leq 2$, kemi që $\frac{2b}{c} \in \{1, 2\}$.

Rasti 2.1. $\frac{2b}{c} = 2$.

Nga kjo kemi që $b = c$, prandaj $a = \frac{b^2}{2b} = \frac{b}{2}$. Kështu që këto treshe (a, b, c) janë të formës $(k, 2k, 2k)$, që qartazi funksionojnë për çdo numër natyror k.

Rasti 2.2. $\frac{2b}{c} = 1$.

Nga kjo kemi që $c = 2b$, prandaj $a = \frac{2b^2}{3b} = \frac{2b}{3}$, kështu që b duhet të plotpjesëtohet me 3. Le të shënojmë $b = 3k$, nga marrim $a = 2k$ dhe $c = 6k$. Prandaj në këtë rast kemi treshet $(a, b, c) = (2k, 3k, 6k)$, që qartazi vlejnë për çdo numër natyror k.

Përfundimisht të gjitha treshet që e plotësojnë kushtin janë $(a, b, c) = (k, k, k), (k, 2k, 2k), (2k, 3k, 6k)$ për k numër natyror dhe të gjitha përmutacionet e tyre.

Skema. (A1) Vërtetimi që $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \leq 2$ .... 5 pikë

(A2) Rasti $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 2$ .... 1 pikë

(A3) Rasti $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1$ .... 9 pikë

(A3.1) $\frac{2b}{c} \in \{1, 2\}$ .... 6 pikë

(A3.2) Rasti $\frac{2b}{c} = 1$ .... 2 pikë

(A3.2) Rasti $\frac{2b}{c} = 2$ .... 1 pikë

4. Le të jetë $n \geq 2$ një numër natyror. Në tavolinë janë vendosur numrat

$$1, 2, \ldots, n.$$

Dy lojtarë, Albani dhe Besa, luajnë me radhë. Albani fillon i pari. Në çdo lëvizje, lojtari që ka radhën zgjedh një numër ende të pazgjedhur nga tavolina. Loja përfundon kur të gjithë numrat janë zgjedhur.

Në fund, secili lojtar mbledh numrat që ka zgjedhur. Le të jenë S_A dhe S_B përkatësisht shumat e numrave të zgjedhur nga Albani dhe Besa. Albani fiton nëse S_A është shumëfish i S_B, pra nëse ekziston një numër natyror k i tillë që

$$S_A = kS_B.$$

Në të kundërt, fiton Besa. Gjeni të gjitha vlerat e n për të cilat Albani ka strategji fituese.

Zgjidhje. Le të jetë

$$T = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Në fund kemi $S_A + S_B = T$.

Nëse A fiton, atëherë

$$S_A = kS_B$$

për ndonjë $k \in \mathbb{N}$. Prandaj

$$T = S_A + S_B = (k+1)S_B.$$

Pra A fiton vetëm nëse S_B është pjesëtues i T.

Do të tregojmë se përgjigjja është

$$\boxed{n = 2, 3.}$$

Për $n = 2$, Albani thjeshtë zgjedh numrin 2. Për $n = 3$, Albani zgjedh fillimisht 3. Nëse Besa zgjedh 1, atëherë $S_A = 5$ dhe $S_B = 1$, ndërsa nëse Besa zgjedh 2 atëherë $S_A = 4$ dhe $S_B = 2$.

Tani do të tregojmë se për çdo $n \geq 4$, lojtari B ka strategji fituese.

Kushti 1. Le të jetë $D = S_A - S_B$. Q Vërejmë se nëse $D < 0$ ose $0 < D < \frac{T}{3}$, atëherë Albani nuk fiton. Për fitoren e Albanit duhet të kemi $D = (k-1)S_B$ dhe $T = (k+1)S_B$, por nga kushti $0 < k - 1 < \dfrac{k+1}{3}$ rrjedh që $1 < k < 2$, që është absurditet.

1. n **çift.** Le të jetë $n = 2m$.
   a. **Nëse** m **është tek**, B i ndan numrat në çiftet e mëposhtme.

   $$(1, 2), (3, 4), \ldots, (2m-1, 2m).$$

   Sa herë që A zgjedh një numër nga një çift, B zgjedh numrin tjetër të atij çifti.
   Në çdo çift, diferenca midis numrit të marrë nga A dhe numrit të marrë nga B është 1 ose -1.
   Prandaj $D = \pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1$ me gjithsej m terma. Meqë m është tek, kemi $D \neq 0$, dhe për më tepër $|D| \leq m$.
   Nga ana tjetër,

   $$T = 1 + 2 + \cdots + 2m = m(2m+1).$$

   Për $m \geq 3$ kemi

   $$m < \frac{m(2m+1)}{3} = \frac{T}{3}.$$

   Pra nga kushti 1, Albani nuk fiton.

   b. **Nëse** m **është çift,** $m \geq 4$, B përdor çiftet

   $$(1, 2m), (2, 3), (4, 5), \ldots, (2m-2, 2m-1).$$

   Me një argument të ngjashëm si më lart, $D = \pm(2m-1) \pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1$. Kjo shumë nuk mund të jetë 0, sepse $2m - 1 > m - 1$,e për më tepër $|D| \leq (2m-1) + (m-1) = 3m - 2$. Për $m \geq 4$ kemi

   $$3m - 2 < \frac{m(2m+1)}{3} = \frac{T}{3}.$$

   Pra nga kushti 1, A nuk fiton.

   c. **Nëse** m **është çift,** $m = 2$ Kjo do të thotë se $n = 4$. Atëherë B përdor çiftet

   $$(1, 4), (2, 3).$$

   Një llogari e shpejtë tregon se rastet e mundshme janë

   $$(S_A, S_B) = (7, 3), (6, 4), (4, 6), (3, 7).$$

   Në asnjë rast S_A nuk është shumëfish i S_B. Pra për $n = 4$, A nuk fiton.

2. n **tek.** Le të jetë $n = 2m + 1$.

   a. Nëse $m = 2$. Atëherë $n = 5$ dhe $T = 15$. Që A të fitojë, duhet që S_B të jetë pjesëtues i 15, pra $S_B \in \{1, 3, 5\}$. Nëse A nuk zgjedh 5 në lëvizjen e parë, atëherë B zgjedh 5. Kështu në fund $S_B > 5$, prandaj A nuk fiton. Nëse A zgjedh 5 në lëvizjen e parë, atëherë B zgjedh 4. Pastaj B zgjedh një numër që nuk e bën shumën e tij 5. Kjo është gjithmonë e mundur. Pra edhe për $n = 5$, B fiton.

   b. Nëse $m = 3$. Kjo do të thotë se $n = 7$ dhe $T = 28$. Atëherë nga çiftet

   $$(1, 2), (3, 4), (5, 6)$$

   lojtari B merr një numër nga secili çift. Prandaj $S_B \in \{9, 10, 11, 12\}$. Por, pjesëtuesit e 28 janë $1, 2, 4, 7, 14, 28$. Asnjëri nga $9, 10, 11, 12$ nuk është pjesëtues i 28. Pra A nuk fiton.

   c. Nëse $m > 3$. Atëherë $n > 7$. B përdor çiftet

   $$(1, 2), (3, 4), (5, 6), \ldots, (2m - 1, 2m),$$

   ndërsa numri $2m + 1$ lihet i veçantë.
   Strategjia e B është: sa herë që A zgjedh një numër nga një çift, B zgjedh numrin tjetër të atij çifti, nëse është e mundur. Në fund, B ka zgjedhur saktësisht një numër nga secili çift.
   Prandaj

   $$1 + 3 + \cdots + (2m - 1) \leq S_B \leq 2 + 4 + \cdots + 2m.$$

   ose $m^2 \leq S_B \leq m(m + 1)$.
   Nga ana tjetër, $T = 1 + 2 + \cdots + (2m + 1) = (2m + 1)(m + 1)$.
   Për $m \geq 4$ kemi

   $$m^2 > \frac{T}{3} \qquad \text{dhe} \qquad m(m + 1) < \frac{T}{2}.$$

   Pra

   $$\frac{T}{3} < S_B < \frac{T}{2}.$$

   Por nëse S_B është pjesëtues i T dhe $S_B < T/2$, atëherë duhet të kemi $S_B \leq \dfrac{T}{3}$. Kjo është kontradiktë. Pra A nuk fiton.

Pra për çdo $n \geq 4$, lojtari B ka strategji fituese. Përfundimisht, vlerat e kërkuara janë $n = 2$ dhe $n = 3$.

Skema. Pikë të pjesshme:

((B1) nuk është aditive me pikat tjera të skemës.)

(A1) Rasti n çift .... 8 pikë

(A2) Rasti n tek .... 7 pikë

(B1) Shënimi i një strategjie të Besës që garanton $S_B > \frac{T}{3}$ për n mjaftueshëm të madh, me vërtetim .. 2 pikë