



Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

OLIMPIADA MATEMATIKE E KOSOVËS 2026

EGMO TST - ZGJIDHJET

7 SHKURT 2026

1. Numrat realë pozitivë a, b, c janë të tillë që numrat ab, bc, ca janë të njëjtë me numrat $a + 2, b + 2, c + 2$ në ndonjë renditje. Gjeni të gjitha vlerat e mundshme të numrave a, b, c .

Zgjidhje. Pa humbur përgjithësinë, mund të supozojmë që $a \leq b \leq c$. Nga kjo rrjedh që $ab \leq ca$ dhe $ca \leq bc$, prandaj $ab \leq ca \leq bc$. Pra, duke marrë parasysh renditjen, duhet të kemi

$$\begin{cases} a + 2 = ab \\ b + 2 = ca \\ c + 2 = bc. \end{cases}$$

Nga ekuacioni i parë kemi $a(b - 1) = 2$, prandaj $b - 1 \neq 0$ dhe $a = \frac{2}{b-1}$. Ngjashëm kemi $c = \frac{2}{b-1}$, prandaj $a = c$ dhe meqë $a \leq b \leq c$, kemi që $a = b = c$. Në veçanti kemi $a(a - 1) = 2$, prej nga fitojmë $a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1) = 0$. Meqë $a > 0$, zgjidhja e vetme është $a = b = c = 2$.

2. Është dhënë një tabelë me dimensione 7×7 . Fillimisht, Kaltrina vendos nga një monedhë të kaltër në disa prej katrorëve njësi të tabelës. Pastaj, Bardha zgjedh sipas dëshirës një rresht dhe një shtyllë të tabelës dhe largon monedhat e kaltra nga ai rresht dhe ajo shtyllë. Pas kësaj, në secilin prej katrorëve njësi të zbrazët në të gjithë tabelën, Bardha vendos nga një monedhë të bardhë. Sa është numri më i vogël i monedhave që duhet t'i vendosë Kaltrina, në mënyrë që pavarësisht se si vepron Bardha, në fund tabela të ketë më shumë monedha të kaltra sesa monedha të bardha?

Zgjidhje. Kaltrinës i duhet që numri i monedhave të kaltra të mbetura në fund të jetë të paktën 25. Fillimisht, tregojmë që 35 monedha të kaltra mjaftojnë. Kaltrina mund t'i vendosë monedhat në këtë mënyrë:

●	●	●	●	●		
	●	●	●	●	●	
		●	●	●	●	●
●			●	●	●	●
●	●			●	●	●
●	●	●			●	●
●	●	●	●			●

Në këtë vendosje, në çdo rresht dhe në çdo shtyllë kemi 5 monedha të kaltra. Atëherë, Bardha mund t'i largojë më së shumti $5 + 5 = 10$ monedha të kaltra, që do të thotë që në tabelë do të mbesin të paktën $35 - 10 = 25$ monedha të kaltra.

Tani tregojmë që 34 monedha të kaltra nuk mjaftojnë, prej nga rrjedh që edhe më pak se 34 monedha nuk mjaftojnë. Supozojmë që tabela ka 34 monedha të kaltra. Nga parimi i Dirileut, ekziston një rresht me $\lceil \frac{34}{7} \rceil = 5$ monedha të kaltra. Bardha i largon monedhat nga ky rresht. Tani në tabelë mbesin më së shumti 29 monedha të kaltra. Supozojmë që janë 29 të tilla. Atëherë nga parimi i Dirileut ekziston një shtyllë me të paktën $\lceil \frac{29}{7} \rceil = 5$ monedha të kaltra. Bardha i largon monedhat nga kjo shtyllë dhe në këtë mënyrë në tabelë mbesin më së shumti 24 monedha të kaltra. Nëse pas hapit të parë mbesin më pak se 29 monedha, atëherë përfundimi rrjedh aq më parë.

Shënim: Një mënyrë më e drejtpërdrejtë është kjo: nëse numri i monedhave në fillim është k , atëherë, duke përdorur dy herë parimin e Dirileut, kemi që numri i monedhave është më së shumti

$$k - \left\lceil \frac{k}{7} \right\rceil - \left\lceil \frac{k - \left\lceil \frac{k}{7} \right\rceil}{7} \right\rceil,$$

prej nga rrjedh menjëherë që $k = 34$ nuk funksionon.

3. Gjeni të gjithë numrat natyrorë m dhe n të tillë që shuma e shifrave të numrit $79^m + 10^n + 13$ është numër i thjeshtë.

Zgjidhje. Meqë $79^m + 10^n + 13 \equiv 1 + 1 + 1 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$, kemi që numri i dhënë plotpjesëtohet me 3, prandaj edhe shuma e shifrave të tij plotpjesëtohet me 3. Pasi shuma e shifrave duhet të jetë numër i thjeshtë, patjetër duhet të jetë saktësisht 3.

Tani $79^m + 10^n + 13 \equiv (-1)^m + 0 + 3 \pmod{10} \equiv 2$ ose $4 \pmod{10}$, prandaj shifra e fundit e numrit është 2 ose 4. Shifra e fundit nuk mund të jetë 4 sepse shuma e shifrave është e barabartë me 3. Pra shifra e fundit duhet të jetë 2, që do të thotë se m është tek. Kështu që ekziston numri natyror $k > n$ i tillë që $79^m + 10^n + 13 = 10^k + 2$, pra

$$79^m + 11 = 10^k - 10^n.$$

Meqë m është tek kemi që

$$10^k - 10^n = 79^m + 11 \equiv (-1)^m + 11 \equiv -1 + 3 \equiv 2 \pmod{8}.$$

Kështu që $n = 1$ ose $n = 2$, sepse në të kundërtën $10^k - 10^n \equiv 0 \pmod{8}$, që nuk është e mundur.

Rasti 1. $n = 1$:

Kemi $10^k - 10 \equiv 2 \pmod{8}$, pra $10^k \equiv 4 \pmod{8}$, që nuk është e mundur nëse $k \geq 3$, prandaj $k = 2$ sepse $k > n = 1$. Tutje kemi

$$79^m + 11 = 10^k - 10^n = 90 \Rightarrow 79^m = 79 \Rightarrow m = 1.$$

Rasti 2. $n = 2$:

Meqë $k > n = 2$, kemi $k \geq 3$, kështu që $-100 \equiv 10^k - 100 \pmod{8} \equiv 2 \pmod{8}$, që nuk është e mundur.

Përfundojmë se dyshja e vetme që e plotëson kushtin është $(m, n) = (1, 1)$.

4. Le të jetë $ABCD$ katror dhe le të jetë O pikëprerja e diagonaleve të tij. Le të jetë X një pikë e çfarëdoshme në brinjën BC . Le të jetë Y pikë në anën e kundërt me X ndaj drejtëzës CD e tillë që AXY është trekëndësh barakrahësh me kënd të drejtë te kulmi X . Le të jetë M pikëprerja e drejtëzave AY dhe BD . Le të jetë T pikëprerja e drejtëzave XO dhe YD . Tregoni që $MX = MT$.

Zgjidhje. Meqë trekëndëshat AXY dhe AOD janë këndrejtë dhe barakrahësh, ata janë të ngjashëm, kështu që $\frac{AX}{AO} = \frac{AY}{AD}$. Gjithashtu, meqë $\angle XAY = \angle OAD = 45^\circ$, kemi që $\angle XAO = \angle YAD$, andaj trekëndëshat XAO dhe YAD janë të ngjashëm. Kështu, kemi

$$\angle AXT = \angle AXO = \angle AYD = \angle AYT,$$

prandaj pikat A, X, Y dhe T i takojnë një rrethi. Meqë $\angle XBM = \angle XAM = 45^\circ$, kemi që pikat A, B, M dhe X ndodhen në një rreth. Tutje $\angle ABX = 90^\circ$, prandaj kemi që $\angle AMX = 90^\circ$, pra $\angle YMX = 90^\circ$. Kështu që trekëndëshat AMX dhe YMX janë kongruent, nga kemi që $AM = YM$, që do të thotë M është mesi i hipotenuzës së trekëndëshit AXY . Përfundojmë që M është qendra e rrethit të jashtëshkruar të trekëndëshit AXY .

Meqë pikat A, X, Y dhe T ndodhen në të njëjtin rreth, kemi që M është qendra e këtij rrethi, që do të thotë se $MX = MT$.