

OLIMPIADA MATEMATIKE KOSOVË - SHQIPËRI 2026

KLASA IX - ZGJIDHJET

28 QERSHOR 2026

Përgjigjet e pjesës së parë

1. 9 2. 16 3. 6 4. 150 5. 1350 6. $\frac{27}{4}$ 7. 5000 8. 8

Zgjidhjet e pjesës së dytë

1. Sa numra natyrorë të njëpasnjëshëm mund të kemi më së shumti, të tillë që secili nga ta mund të shënohet si prodhim i saktësisht dy numrave të thjeshtë?

Zgjidhje: Supozojmë që kemi 4 numra të tillë. Atëherë dy nga ta janë çift. Ata mund t'i shënojmë si $2p$ dhe $2q$, ku supozojmë që $2p < 2q$. Meqë janë numra çift të njëpasnjëshëm, atëherë $q = p + 1$. Tani kemi dy numra të thjeshtë të njëpasnjëshëm, prandaj e vetmja mundësi është $p = 2$ dhe $q = 3$. Atëherë kemi numrat 4 dhe 6, që do të thotë që kemi edhe numrin 5, por 5 nuk është prodhim i dy numrave të thjeshtë.

Për 3 numra mund të marrim $33 = 3 \cdot 11$, $34 = 2 \cdot 17$ dhe $35 = 5 \cdot 7$.

2. Është dhënë trekëndëshi $\triangle ABC$. Le të jenë D, E pika në brinjën BC , F një pikë në brinjën AC dhe G një pikë në brinjën AB , të tilla që $DEFG$ është katror. Nëse $S_{AGF} = S_{BGD} + S_{CEF}$, gjeni me vërtetim $\frac{S_{AGF}}{S_{BGFC}}$.

Zgjidhje. Le të jetë x gjatësia e brinjës së katrorit $DEFG$ dhe y gjatësia e segmentit BD dhe z gjatësia e segmentit CE . Le të jetë h gjatësia e lartësisë nga A në GF . Nga kushti kemi $\frac{xh}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{xz}{2} \Rightarrow h = y + z$.

Tani, nga Teorema e Talesit, pasi që $GF \parallel BC$ kemi që $\frac{h}{h+x} = \frac{x}{x+y+z} = \frac{x}{x+h} \Rightarrow h = x$. Tani

$$\frac{S_{AGF}}{S_{BGFC}} = \frac{\frac{xh}{2}}{\frac{x+x+y+z}{2}x} = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

3. Gjeni të gjitha treshet e numrave natyrorë (a, b, c) të tilla që të tre numrat

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a} + \frac{b}{c}, \quad \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$$

janë numra natyrorë.

Zgjidhje. Pa humbur përgjithësimin mund të supozojmë që $a \leq b \leq c$. Atëherë kemi që

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \leq 1 + 1 = 2,$$

prandaj $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \in \{1, 2\}$.

Rasti 1. $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 2$.

Mosbarazimet kthehen në barazime, nga kemi që $a = b = c$, që qartazi është zgjidhje e detyrës. Pra, një treshë e tillë është $(a, b, c) = (k, k, k)$ për çdo numër natyror k .

Rasti 2. $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1$.

Atëherë kemi $a = \frac{bc}{b+c}$, prandaj

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{c} = \frac{b+c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{2b}{c} + 1$$

është numër natyror, nga kemi që $\frac{2b}{c}$ është numër natyror. Meqë $\frac{2b}{c} \leq 2$, kemi që $\frac{2b}{c} \in \{1, 2\}$.

Rasti 2.1. $\frac{2b}{c} = 2$.

Nga kjo kemi që $b = c$, prandaj $a = \frac{b^2}{2b} = \frac{b}{2}$. Kështu që këto treshë (a, b, c) janë të formës $(k, 2k, 2k)$, që qartazi funksionojnë për çdo numër natyror k .

Rasti 2.2. $\frac{2b}{c} = 1$.

Nga kjo kemi që $c = 2b$, prandaj $a = \frac{2b^2}{3b} = \frac{2b}{3}$, kështu që b duhet të plotpjesëtohet me 3. Le të shënojmë $b = 3k$, nga marrim $a = 2k$ dhe $c = 6k$. Prandaj në këtë rast kemi treshet $(a, b, c) = (2k, 3k, 6k)$, që qartazi vlejnë për çdo numër natyror k .

Përfundimisht të gjitha treshet që e plotësojnë kushtin janë $(a, b, c) = (k, k, k), (k, 2k, 2k), (2k, 3k, 6k)$ për k numër natyror dhe të gjitha permutacionet e tyre.

4. Le të jetë $n \geq 2$ një numër natyror. Në tavolinë janë vendosur numrat

$$1, 2, \dots, n.$$

Dy lojtarë, Albani dhe Besa, luajnë me radhë. Albani fillon i pari. Në çdo lëvizje, lojtari që ka radhën zgjedh një numër ende të pazgjedhur nga tavolina. Loja përfundon kur të gjithë numrat janë zgjedhur.

Në fund, secili lojtar mbledh numrat që ka zgjedhur. Le të jenë S_A dhe S_B përkatësisht shumat e numrave të zgjedhur nga Albani dhe Besa. Albani fiton nëse S_A është shumëfish i S_B , pra nëse ekziston një numër natyror k i tillë që

$$S_A = kS_B.$$

Në të kundërt, fiton Besa. Gjenerali të gjitha vlerat e n për të cilat Albani ka strategji fituese.

Zgjidhje 1. Le të jenë S_A dhe S_B shumat e numrave të Albanit dhe të Besës, përkatësisht. Për $n = 2$, Albani thjeshtë zgjedh numrin 2. Për $n = 3$, Albani zgjedh fillimisht 3. Nëse Besa zgjedh 1, atëherë $S_A = 5$ dhe $S_B = 1$, ndërsa nëse Besa zgjedh 2 atëherë $S_A = 4$ dhe $S_B = 2$.

Tani do të tregojmë se për çdo $n \geq 4$, Besa ka strategji fituese. Le të jetë T shuma e të gjithë numrave në tavolinë. Meqë $T = S_A + S_B$, atëherë $S_B \mid S_A \iff S_B \mid T$.

Ideja gjenerale është kjo: Besa zgjedhë numra sa më të mëdhenjë që mundet. E analizojmë këtë në dy raste.

(*n tek*)

Le të jetë $n = 2k + 1$, ku $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$.

Nëse $k = 2$, atëherë $n = 5$ dhe shuma e numrave në tavolinë është 15. Që Albani të fitojë, duhet që S_B të jetë pjesëtues i 15, pra $S_B \in \{1, 3, 5\}$. Nëse Albani nuk zgjedh 5 në lëvizjen e parë, atëherë Besa zgjedh 5. Kështu në fund $S_B > 5$, prandaj Besa fiton. Nëse Albani zgjedh 5 në lëvizjen e parë, atëherë Besa zgjedh 4. Pastaj Besa zgjedh një numër që nuk e bën shumën e tij 5. Kjo është gjithmonë e mundur. Pra edhe për $n = 5$, Besa fiton.

Tani e tutje kemi $k > 2$. Nëse Besa zgjedh gjithmonë numrin më të madh në dispozicion, atëherë numri i parë që e zgjedhë është të paktën $2k$, numri i dytë që e zgjedhë është të paktën $2k - 2$, e kështu me radhë, prandaj kemi

$$\begin{aligned} S_B &\geq (2k) + (2k - 2) + \dots + 4 + 2 \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + \dots + k) \\ &= 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} = k(k+1). \end{aligned}$$

Shuma e të gjithë numrave është

$$T = 1 + 2 + \dots + (2k + 1) = \frac{(2k + 1)(2k + 2)}{2} = (k + 1)(2k + 1).$$

Kemi

$$\frac{T}{S_B} \leq \frac{(k + 1)(2k + 1)}{k(k + 1)} = \frac{2k + 1}{k} = 2 + \frac{1}{k} < 3.$$

Kjo do të thotë që nëse $S_B \mid S_A$, atëherë e vetmja mundësi është $S_A = S_B$. Besa mund ta garantojë që nuk përfundon me shumë të barabartë me Albanin në këtë mënyrë: ajo gjithmonë zgjedhë numrin më të madh në dispozicion, përpos në lëvizjen e fundit, ku nga dy opsionet që ka, ajo zgjedh numrin që jep $S_A \neq S_B$. Kjo funksionon sepse:

- (i) Që të vlejë $S_A = S_B$ duhet të kemi $S_B = \frac{T}{2}$. Është e qartë nga dy opsionet që ka në fund Besa, më së shumti njëri nga ta mund të jap shumën $\frac{T}{2}$. Prandaj $\frac{T}{S_B} \neq 2$.
- (ii) Tani e konfirmojmë që numrat e zgjedhur nga Besa janë mjaftueshëm të mëdhenj. Kemi

$$S_B \geq (2k) + (2k - 2) + \dots + 4 + 1 = k(k + 1) - 1,$$

dhe ngjashëm

$$\frac{T}{S_B} \leq \frac{(k + 1)(2k + 1)}{k(k + 1) - 1} < 3 \iff 2k^2 + 3k + 1 < 3k^2 + 3k - 3 \iff k^2 > 4 \iff k > 2,$$

prandaj $\frac{T}{S_B} < 3$.

Duke kombinuar (i) dhe (ii), kemi që S_B nuk mund të jetë pjestues i T , prandaj Besa e fiton lojën.
(*n çift*)

Le të jetë $n = 2k$, ku $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$.

Nëse $k = 2$, pra $n = 4$, atëherë Besa përdor çiftet

$$(1, 4), (2, 3).$$

Kur Albani zgjedhë një numër nga njëri çift, Besa zgjedh tjetrin. Rastet e mundshme të shumave janë

$$(S_A, S_B) = (7, 3), (6, 4), (4, 6), (3, 7).$$

Në asnjë rast S_A nuk është shumëfish i S_B . Pra për $n = 4$, Besa fiton.

Tani e tutje kemi $k > 2$. Ngjashëm si te rasti n tek, nëse Besa gjithmonë zgjedh numrin më të madh në dispozicion kemi

$$S_B \geq (2k - 1) + (2k - 3) + \cdots + 3 + 1 = k^2.$$

Shuma e të gjithë numrave është

$$T = 1 + 2 + \cdots + (2k) = \frac{2k \cdot (2k + 1)}{2} = k(2k + 1).$$

Atëherë

$$\frac{T}{S_B} \leq \frac{k(2k + 1)}{k^2} = \frac{2k + 1}{k} = 2 + \frac{1}{k} < 3.$$

Për ta garantuar që nuk vlen $\frac{T}{S_B} = 2$, (pra $S_A = S_B$), Besa vepron kështu: ajo gjithmonë zgjedhë numrin më të madh në dispozicion, përpos në lëvizjen e parafundit, ku nga tre opsionet që ka, ajo bën zgjedhje që jep $S_A \neq S_B$. Tregojmë që kjo strategji është gjithmonë e mundur dhe se funksionon.

- (i) Në lëvizjen e parafundit, Besa ka tre opsione. Le të jenë ata numrat a, b, c . Meqë njërin nga ta do ta zgjedhë Albani pastaj, shume e Besës do të rritet për një nga numrat $a + b, b + c$ ose $c + a$. Meqë a, b, c janë numra të ndryshëm mes vete, edhe $a + b, b + c, c + a$ janë të ndryshëm mes vete. Prandaj, më së shumti njëri nga ta mund ta dërgojë S_B te vlera $\frac{T}{2}$. Tani është e qartë se si vepron Besa. Për shembull, nëse $a + b$ jep $S_B = \frac{T}{2}$, atëherë Besa thjeshtë zgjedhë numrin c në lëvizjen e parafundit. Kjo do të thotë që shuma e saj do të rritet për $b + c$ ose $c + a$. Ngjashëm edhe në dy rastet tjera.
- (ii) Tani e konfirmojmë përsëri që numrat e zgjedhur nga Besa janë mjaftueshëm të mëdhenj. Kemi

$$S_B \geq (2k - 1) + (2k - 3) + \cdots + 5 + 2 + 1 = k^2 - 1,$$

dhe ngjashëm

$$\frac{T}{S_B} \leq \frac{k(2k + 1)}{k^2 - 1} < 3 \iff 2k^2 + k < 3k^2 - 3 \iff k^2 - k - 3 > 0 \iff k(k - 1) + 3 > 0.$$

Jobarazimi i fundit është i saktë për $k > 3$. prandaj $\frac{T}{S_B} < 3$.

Ngjashëm si te rasti n tek, kombinimi i (i) dhe (ii) tregon që me këtë strategji Besa e garanton fitoren.

Zgjidhje 2. Le të jetë

$$T = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Në fund kemi $S_A + S_B = T$.

Nëse A fiton, atëherë

$$S_A = kS_B$$

për ndonjë $k \in \mathbb{N}$. Prandaj

$$T = S_A + S_B = (k+1)S_B.$$

Pra A fiton vetëm nëse S_B është pjesëtues i T .

Do të tregojmë se përgjigjja është

$$\boxed{n = 2, 3.}$$

Për $n = 2$, Albani thjeshtë zgjedh numrin 2. Për $n = 3$, Albani zgjedh fillimisht 3. Nëse Besa zgjedh 1, atëherë $S_A = 5$ dhe $S_B = 1$, ndërsa nëse Besa zgjedh 2 atëherë $S_A = 4$ dhe $S_B = 2$.

Tani do të tregojmë se për çdo $n \geq 4$, lojtari B ka strategji fituese.

Kushti 1. Le të jetë $D = S_A - S_B$. Q Vërejmë se nëse $D < 0$ ose $0 < D < \frac{T}{3}$, atëherë Albani nuk fiton.

Për fitoren e Albanit duhet të kemi $D = (k-1)S_B$ dhe $T = (k+1)S_B$, por nga kushti $0 < k-1 < \frac{k+1}{3}$ rrjedh që $1 < k < 2$, që është absurditet.

1. **n çift.** Le të jetë $n = 2m$.

a. **Nëse m është tek,** B i ndan numrat në çiftet e mëposhtme.

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (2m-1, 2m).$$

Sa herë që A zgjedh një numër nga një çift, B zgjedh numrin tjetër të atij çifti.

Në çdo çift, diferenca midis numrit të marrë nga A dhe numrit të marrë nga B është 1 ose -1 .

Prandaj $D = \pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1$ me gjithsej m terma. Meqë m është tek, kemi $D \neq 0$, dhe për më tepër $|D| \leq m$.

Nga ana tjetër,

$$T = 1 + 2 + \dots + 2m = m(2m+1).$$

Për $m \geq 3$ kemi

$$m < \frac{m(2m+1)}{3} = \frac{T}{3}.$$

Pra nga kushti 1, Albani nuk fiton.

b. **Nëse m është çift,** $m \geq 4$, B përdor çiftet

$$(1, 2m), (2, 3), (4, 5), \dots, (2m-2, 2m-1).$$

Me një argument të ngjashëm si më lart, $D = \pm(2m-1) \pm 1 \pm 1 \pm \dots \pm 1$. Kjo shumë nuk mund të jetë 0, sepse $2m-1 > m-1$, e për më tepër $|D| \leq (2m-1) + (m-1) = 3m-2$. Për $m \geq 4$ kemi

$$3m-2 < \frac{m(2m+1)}{3} = \frac{T}{3}.$$

Pra nga kushti 1, A nuk fiton.

c. **Nëse m është çift,** $m = 2$ Kjo do të thotë se $n = 4$. Atëherë B përdor çiftet

$$(1, 4), (2, 3).$$

Një llogari e shpejtë tregon se rastet e mundshme janë

$$(S_A, S_B) = (7, 3), (6, 4), (4, 6), (3, 7).$$

Në asnjë rast S_A nuk është shumëfish i S_B . Pra për $n = 4$, A nuk fiton.

2. **n tek.** Le të jetë $n = 2m+1$.

a. Nëse $m = 2$. Atëherë $n = 5$ dhe $T = 15$. Që A të fitojë, duhet që S_B të jetë pjesëtues i 15, pra $S_B \in \{1, 3, 5\}$. Nëse A nuk zgjedh 5 në lëvizjen e parë, atëherë B zgjedh 5. Kështu në fund $S_B > 5$, prandaj A nuk fiton. Nëse A zgjedh 5 në lëvizjen e parë, atëherë B zgjedh 4. Pastaj B zgjedh një numër që nuk e bën shumën e tij 5. Kjo është gjithmonë e mundur. Pra edhe për $n = 5$, B fiton.

b. Nëse $m = 3$. Kjo do të thotë se $n = 7$ dhe $T = 28$. Atëherë nga çiftet

$$(1, 2), (3, 4), (5, 6)$$

lojtari B merr një numër nga secili çift. Prandaj $S_B \in \{9, 10, 11, 12\}$. Por, pjesëtuesit e 28 janë 1, 2, 4, 7, 14, 28. Asnjëri nga 9, 10, 11, 12 nuk është pjesëtues i 28. Pra A nuk fiton.

c. Nëse $m > 3$. Atëherë $n > 7$. B përdor çiftet

$$(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots, (2m-1, 2m),$$

ndërsa numri $2m+1$ lihet i veçantë.

Strategjia e B është: sa herë që A zgjedh një numër nga një çift, B zgjedh numrin tjetër të atij çifti, nëse është e mundur. Në fund, B ka zgjedhur saktësisht një numër nga secili çift.

Prandaj

$$1 + 3 + \dots + (2m-1) \leq S_B \leq 2 + 4 + \dots + 2m.$$

ose $m^2 \leq S_B \leq m(m+1)$.

Nga ana tjetër, $T = 1 + 2 + \dots + (2m+1) = (2m+1)(m+1)$.

Për $m \geq 4$ kemi

$$m^2 > \frac{T}{3} \quad \text{dhe} \quad m(m+1) < \frac{T}{2}.$$

Pra

$$\frac{T}{3} < S_B < \frac{T}{2}.$$

Por nëse S_B është pjesëtues i T dhe $S_B < T/2$, atëherë duhet të kemi $S_B \leq \frac{T}{3}$. Kjo është kontradiktë. Pra A nuk fiton.

Pra për çdo $n \geq 4$, lojtari B ka strategji fituese. Përfundimisht, vlerat e kërkuara janë $n = 2$ dhe $n = 3$.