

Olimpiada Matematike Komunale 2026

Klasa X - Zgjidhjet

1. Në një klasë me 30 nxënës, secili nxënës luan së paku një nga tre sportet: futboll, basketboll, tenis. 8 nxënës luajnë futboll, por jo tenis. 7 nxënës luajnë basketboll, por jo futboll. 6 nxënës luajnë tenis, por jo basketboll. Sa nxënës i luajnë të trija sportet?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Marrim tre grupet

G_1 : nxënësit që luajnë futboll, por jo tenis

G_2 : nxënësit që luajnë basketboll, por jo futboll

G_3 : nxënësit që luajnë tenis, por jo basketboll.

Vërejmë që asnjë nxënës nuk mund t'i takojë dy grupeve në të njëjtën kohë (për shembull G_1 thotë që luan futboll por G_2 thotë që nuk luan). Pra këto tre grupe përmbajnë $8 + 7 + 6 = 21$ nxënës të ndryshëm. Meqë klasa ka 30 nxënës, çfarë sporte luajnë 9 nxënësit e tjerë? Secili nga ta duhet të luajë të paktën një sport, sipas detyrës. Nëse luan futboll, atëherë duhet të luajë edhe tenis përndryshe do të ishte te Grupi 1. Por meqë luan tenis, atëherë duhet të luajë edhe basketboll, përndryshe do të ishte te Grupi 3. Pra e vetmja mundësi është që nxënësit e mbetur i luajnë të trija sportet. Përgjigjja është 9.

2. Sa numra natyrorë N janë të tillë që e pjestojnë numrin $N^2 + 60$?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) 12

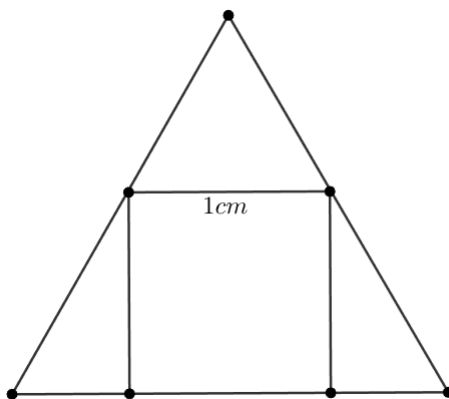
Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Kemi

$$\frac{N^2 + 60}{N} = \frac{N^2}{N} + \frac{60}{N} = N + \frac{60}{N}.$$

Ky numër është i plotë atëherë dhe vetëm atëherë kur N është pjesëtues i 60. Meqë $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, numri i pjesëtuesve është $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

3. Katrori me gjatësi brinje 1cm është brendashkuar në një trekëndësh barabrinjës. Sa është gjatësia e brinjës së këtij trekëndëshi?

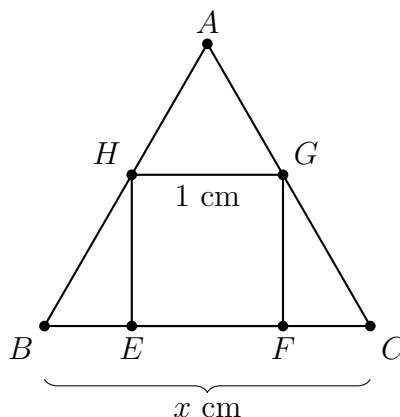


- (A) 2 (B) $1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $2\sqrt{3}$ (E) $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje 1: Le të jetë x gjatësia e brinjës së trekëndëshit. Shënojmë pikat si në figurë. Është e qartë që $BE = FC$. Atëherë nga $BC = x$ dhe $EF = 1$, kemi që $BE = \frac{x-1}{2}$. Nga Teorema e Pitagorës në trekëndëshin $\triangle BEH$, kemi që

$$BH = \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}{2}.$$



Tani, meqë $HG \parallel EF \parallel BC$, trekëndëshi $\triangle AHG$ është gjithashtu barabrinjës, prandaj $AH = 1$. Kjo do të thotë që $BH = x - 1$. Prandaj, kemi

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}{2} \\ \implies 4(x - 1)^2 &= x^2 - 2x + 5 \\ \implies 3x^2 - 6x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Zgjidhjet e këtij ekuacioni kuadratik janë

$$x_{12} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}},$$

e meqë $1 - \frac{2}{\sqrt{3}} < 0$, konkludojmë që $x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Zgjidhje 2: Ngjashëm sikur te Zgjidhja 1, kemi që $AH = 1$. Trekëndëshi $\triangle BEH$ ka kënde $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, prandaj brinjët e tij qëndrojnë në raport $1 : \sqrt{3} : 2$. Atëherë meqë $EH = 1$, kemi që $BH = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Prandaj $AB = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. Në tabelë janë të shënuar disa numra, mesatarja aritmetike e të cilëve është 2025. Kur Ana e shton numrin 2030 në tabelë, mesatarja e numrave bëhet 2026. Sa numra ishin në tabelë në fillim?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Le të jetë k numri i numrave në tabelë. I shënojmë numrat me $a_1, a_2, \dots, a_k$. Kemi

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} = 2025.$$

Kur shtohet numri 2030 kemi

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + 2030}{k + 1} = 2026.$$

Nga barazimi i parë kemi $a_1 + \dots + a_k = 2025k$, prandaj

$$2025k + 2030 = 2026(k + 1),$$

prej nga fitojmë $k = 4$.

5. Le të jetë x numër i tillë që $x^3 = x^2 - 1$. Sa është vlera e shprehjes $x^5 + x$?

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Duke shfrytëzuar vazhdimisht faktin që $x^3 = x^2 - 1$ kemi

$$\begin{aligned} x^5 + x &= x^3 x^2 + x \\ &= (x^2 - 1)x^2 + x \\ &= x^4 - x^2 + x \\ &= (x^2 - 1)x - x^2 + x \\ &= x^3 - x^2 \\ &= -1. \end{aligned}$$

6. Nëse dy produkteve A dhe B i rritet çmimi për $x\%$, çmimi i produktit A bëhet 48 euro më i shtrenjtë se ai i produktit B . Ndërkaq, nëse këtyre produkteve i zbritet çmimi për $x\%$, çmimi i produktit A bëhet 32 euro më i shtrenjtë se ai i produktit B . Sa është vlera e x ?

(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 32 (E) 40

Përgjigjja: (A)

Zgjidhje: Le të jenë a, b çmimet e produkteve A, B përkatësisht. Kemi

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot a - \left(1 + \frac{x}{100}\right)b &= 48 \\ \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot a - \left(1 - \frac{x}{100}\right)b &= 32. \end{aligned}$$

Duke i mbledhur këto anë për anë fitojmë $2a - 2b = 80$, apo ndryshe $a = b + 40$. E zëvendësojmë këtë në ekuacionin e parë dhe fitojmë

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot (b + 40) - \left(1 + \frac{x}{100}\right)b &= 48 \\ \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot 40 &= 48 \\ \frac{x}{100} &= \frac{48}{40} - 1 \\ \frac{x}{100} &= \frac{1}{5} \\ x &= 20. \end{aligned}$$

7. Për tre numrat realë a, b, c vlejñë barazimet $a + 2b + 3c = 3$ dhe $3a + 2b + c = 5$. Sa është vlera e $2026a + 2027b + 2028c$?

(A) 2026 (B) 3039 (C) 4053 (D) 4408 (E) 4972

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Mbledhim dy ekuacionet anë për anë dhe fitojmë

$$4a + 4b + 4c = 8,$$

prej nga $a + b + c = 2$. Kemi

$$\begin{aligned} 2026a + 2027b + 2028c &= 2025a + 2025b + 2025c + (a + 2b + 3c) \\ &= 2025(a + b + c) + 3 \\ &= 2025 \cdot 2 + 3 \\ &= 4053. \end{aligned}$$

8. Cili nga numrat e mëposhtëm është numër irracional?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^3}}$ (B) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ (C) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{24}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$
(E) $\sqrt{6} + (2 - \sqrt{2})\sqrt{3}$

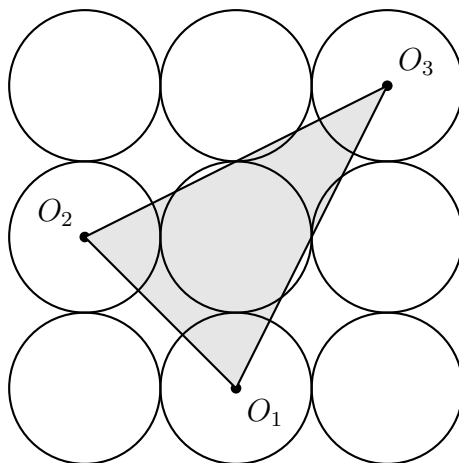
Përgjigjja: (E)

Zgjidhje: Kemi

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^3}} &= \sqrt{\frac{2}{2^3}} = \sqrt{\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2} \\ (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) &= (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \\ (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{24} &= 3 - 2 \cdot \sqrt{3}\sqrt{2} + 2 + \sqrt{24} = 5 - \sqrt{24} + \sqrt{24} = 5 \\ \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} - \sqrt{2} = 1 \\ \sqrt{6} + (2 - \sqrt{2})\sqrt{3} &= \sqrt{6} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

prandaj përgjigjja e saktë është nën (E).

9. Në figurën e mëposhtme janë paraqitur nëntë rathë kongruentë me rreze 1cm . Pikat O_1, O_2, O_3 janë qendra të rathëve. Sa është syprina e sipërfaqes së trekëndëshit $\triangle O_1O_2O_3$?

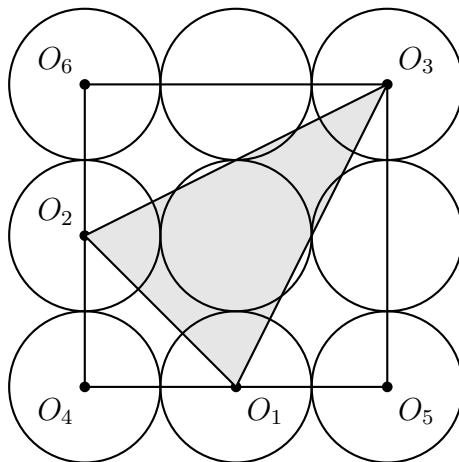


- (A) $3\sqrt{2}cm^2$ (B) $4\sqrt{2}cm^2$ (C) $6cm^2$ (D) $5\sqrt{2}cm^2$ (E) $8cm^2$

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Konsiderojmë qendrat O_4, O_5, O_6 si në figurë dhe shënojmë me $S(O_iO_jO_k)$ syprinën e trekëndëshit me kulme O_i, O_j, O_k . Katërkëndëshi $O_4O_5O_3O_6$ është katror dhe lehtë shihet se ka syprinë $16cm^2$. Kemi

$$\begin{aligned} S(O_1O_2O_3) &= 16cm^2 - S(O_1O_2O_4) - S(O_1O_3O_5) - S(O_2O_3O_6) \\ &= 16cm^2 - 2cm^2 - 4cm^2 - 4cm^2 \\ &= 6cm^2 \end{aligned}$$



10. Për çdo numër natyror n nga 1 deri në 200, Beni shënoi në tabelë raportin e n me pjesëtuesin e dytë më të madh të n (pra me pjesëtuesin më të madh pas vetvetes). Për shembull, për $n = 16$ ai shënoi numrin 2, meqë $2 = \frac{16}{8}$, ndërsa për $n = 7$ ai shënoi numrin 7. Sa herë e shënoi Beni numrin 3 në tabelë?

- (A) 30 (B) 31 (C) 32 (D) 33 (E) 34

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Le të jetë n një numër natyror nga 1 deri në 200. Nëse n është i përbërë, pjesëtuesi më i vogël i mirëfilltë i tij është gjithmonë një numër i thjeshtë. Po e shënojmë atë me p . Atëherë pjesëtuesi i dytë më i madh i n ka formën $\frac{n}{p}$. Raporti të cilin Beni e shënon në tabelë është

$$\frac{\frac{n}{p}}{p} = p.$$

Ndërkaq, nëse numri n është i thjeshtë, atëherë pjesëtuesi i dytë më i madh është 1 dhe raporti që shënon Beni është $\frac{n}{1} = n$. Pra, për çdo numër nga 1 deri në 200, Beni e shënon vet atë numër nëse ai është i thjeshtë ose e shënon pjesëtuesin më të vogël të tij nëse ai numër është i përbërë.

Numri 3 do të shënohet në tabelë për $n = 3$ dhe për të gjithë numrat tjerë, pjesëtuesi më i vogël i të cilëve është numri 3. Me fjalë të tjera, duhet të gjejmë sa numra nga 1 deri në 200 plotpjesëtohen me 3, por jo me 2.

Këtë mund ta bëjmë duke marrë të gjithë numrat që plotpjesëtohen me 3 dhe duke i larguar nga ta ata që plotpjesëtohen me 2. Vërejmë që këta që do t'i largojmë janë pikërisht numrat që plotpjesëtohen me 6. Atëherë rezultati i kërkuar është

$$\left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{6} \right\rfloor = 66 - 33 = 33.$$