

Olimpiada Matematike Komunale 2026

Klasa XI

1. Sa është vlera e shprehjes $2 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2026})$?

(A) 2^{2027} (B) $2^{2027} + 2$ (C) $2^{2026} + 2^{2027}$ (D) 2^{2028} (E) $2^{\frac{2026 \cdot 2027}{2}}$

Përgjigjja: (A)

Zgjidhje: Shuma brenda kllapave është shumë e termave të vargut gjeometrik. Kemi

$$\begin{aligned} 2 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2026}) &= 2 + 2 \cdot \frac{2^{2026} - 1}{2 - 1} \\ &= 2 + 2 \cdot 2^{2026} - 2 \\ &= 2^{2027}. \end{aligned}$$

2. Në vargun 1001101011, në një lëvizje ne mund t'ia ndërrojmë vlerën tre shifrave fqinje, duke e ndërruar secilën prej tyre nga 1 në 0 ose nga 0 në 1. Me katër lëvizje të tilla, sa është numri maksimal i shifrave 1 që mund t'i kemi në varg?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Përgjigjja: (E)

Zgjidhje: Është e mundur që t'i bëjmë të gjitha shifrat 1, në këtë mënyrë:

1001101011
↓
1110101011
↓
1111011011
↓
1111100011
↓
1111111111

3. Një produkt ka çmimin x euro, ku x është numër natyror. Pasi çmimi rritet për $x\%$, vlera e tij bëhet 56 euro. Sa është shuma e shifrave të numrit x ?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Përgjigjja: (A)

Zgjidhje: Kemi

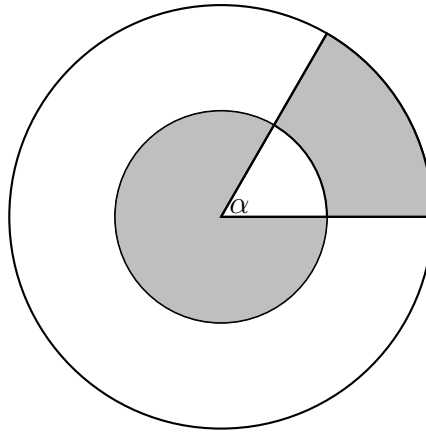
$$\begin{aligned} x + \frac{x}{100} \cdot x &= 56 \\ \iff x^2 + 100x - 5600 &= 0 \end{aligned}$$

Nga këtu

$$\begin{aligned}
 x_{12} &= \frac{-100 \pm \sqrt{10000 + 4 \cdot 5600}}{2} \\
 &= \frac{-100 \pm \sqrt{10000 + 22400}}{2} \\
 &= \frac{-100 \pm \sqrt{32400}}{2} \\
 &= \frac{-100 \pm 180}{2}.
 \end{aligned}$$

Nga kjo fitojmë $x_1 = 40$ dhe $x_2 = -140$. Meqë çmimi është jonegativ, kemi që $x = 40$ dhe rezultati është 4.

4. Në figurën e mëposhtme janë paraqitur dy rrathë me qendër të njëjtë, ku rrezja e rrethit të madh është dyfish më e madhe se rrezja e rrethit të vogël. Këndi α i formon dy pjesë të hijëzuara. Sa duhet të jetë masa e këndit α në mënyrë që të dyja sipërfaqet e hijëzuara të kenë syprinë të barabartë?



- (A) 60° (B) 70° (C) 75° (D) 80° (E) 90°

Përgjigjja: (E)

Zgjidhje: Le të jetë rrezja e rrethit të vogël r . Atëherë rrethi i madh ka rreze $2r$. Syprina e sipërfaqes së hijëzuar në rrethin e vogël është $\frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2$. Syprina e unazës së formuar nga të dy rrathët është $\pi(2r)^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$, ndërsa vetëm pjesa e hijëzuar ka syprinë $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 3\pi r^2$. Kemi

$$\frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 3\pi r^2.$$

Pas thjeshtimeve fitojmë

$$2\pi - \alpha = 3\alpha,$$

nga e cila fitojmë $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

5. Ana i shënoi në tabelë të gjithë numrat katërshifrorë që formohen duke përdorur secilën nga shifrat 1, 2, 3, 4 saktësisht një herë. Sa është shuma e të gjithë këtyre numrave?

- (A) 63600 (B) 64060 (C) 66660 (D) 67620 (E) 68880

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Kemi $4! = 24$ numra katërshifror të ndryshëm që përmbajnë secilën nga shifrat 1, 2, 3, 4. Observimi kryesor është që, nëse konsiderojmë njërin nga shifrat e këtyre 24 numrave, për shembull shifrën e parë (atë të mijshëve), atëherë secila nga shifrat 1, 2, 3, 4 paraqitet nga 6 herë në atë pozitë. Duke e pasur parasysh këtë fakt, mbledhjen e kryejmë në këtë mënyrë:

$$\begin{aligned} S &= (6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4) \cdot 1000 + (6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4) \cdot 100 \\ &\quad + (6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4) \cdot 10 + (6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4) \cdot 1 \\ &= (6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4) \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) \\ &= 60 \cdot 1111 = 66660 \end{aligned}$$

6. Le të jenë x dhe y numra realë pozitivë. Sa është vlera më e vogël e mundshme e shprehjes $\frac{(x+2y)^2}{2xy}$?

- (A) 0.5 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 4.5

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Nga jobarazimi AM-GM kemi

$$x + 2y \geq 2\sqrt{x \cdot 2y}.$$

E përdorim këtë për të fituar

$$\frac{(x + 2y)^2}{2xy} \geq \frac{(2\sqrt{2xy})^2}{2xy} = \frac{4 \cdot 2xy}{2xy} = 4.$$

Pra kjo shprehje është gjithmonë më e madhe ose e barabartë me 4, ndërsa për $x = 2$ dhe $y = 1$ e arrin vlerën 4, prandaj 4 është vlera më e vogël e mundshme e saj.

7. Sa dyshe (a, b) të numrave natyrorë a dhe b janë të tilla që $ab + a + b = 2024$?

- (A) 9 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 16

Përgjigjja: (D)

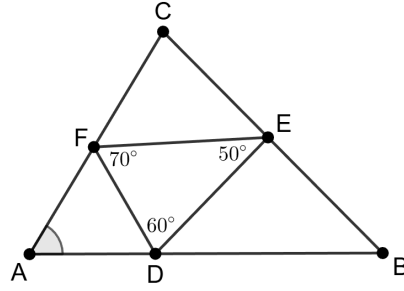
Zgjidhje: Kemi

$$\begin{aligned} ab + a + b + 1 &= 2025 \\ \implies (a + 1)(b + 1) &= 2025. \end{aligned}$$

Meqë $a + 1$ dhe $b + 1$ janë numra natyrorë, ata duhet të jenë pjesëtues të 2025 (për një pjesëtues d të 2025, $a + 1$ merr vlerën d ndërsa $b + 1$ merr vlerën $\frac{2025}{d}$). Numri $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ ka $5 \cdot 3 = 15$ pjesëtues. Numri $a + 1$ mund të jetë cilido prej tyre përpos 1, sepse në atë rast do të kishim $a = 0$ që nuk lejohet, dhe përpos 2025, sepse në atë rast do të kishim $b = 0$. Çdo pjesëtues tjetër jep zgjidhje të saktë të barazimit, prandaj përgjigjja është 13.

8. Në trekëndëshin $\triangle ABC$ janë dhënë pikat D, E, F në brinjët AB, BC, CA përkatësisht, të tilla që $AD = AF$, $BD = BE$ dhe $CF = CE$. Gjithashtu janë dhënë këndet $\angle DFE = 70^\circ$, $\angle EDF = 60^\circ$ dhe $\angle FED = 50^\circ$. Sa është masa e këndit $\angle BAC$?

(Figura shërben për ilustrim. Madhësitë e paraqitura në të nuk janë të sakta.)



- (A) 60° (B) 65° (C) 70° (D) 75° (E) 80°

Përgjigjja: (E)

Zgjidhje: Nga $AF = AD$ kemi që $\angle AFD = \angle ADF = x$. Ngjashëm $\angle BDE = \angle BED = y$ dhe $\angle CFE = \angle CEF = z$. Duke konsideruar këndet te pikat D, E, F fitojmë

$$x + y + 60^\circ = 180^\circ$$

$$y + z + 50^\circ = 180^\circ$$

$$z + x + 70^\circ = 180^\circ,$$

prej nga

$$x + y = 120^\circ$$

$$y + z = 130^\circ$$

$$z + x = 110^\circ.$$

Duke e zgjidhur këtë sistem fitojmë $x = 50^\circ$. Nga trekëndëshi $\triangle ADF$ kemi që $\angle DAF + 2x = 180^\circ$, nga e cila nxjerrim $\angle DAF = \angle BAD = 80^\circ$.

9. Prodhimi i tre numrave të njëpasnjëshëm është numri gjashtëshifror $a7aa7a$. Sa është vlera e shifrës a ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Mes tre numrave të njëpasnjëshëm patjetër njëri nga ta është shumëfish i numrit 3 dhe të paktën një nga numrat është numër çift. Atëherë prodhimi i tyre $a7aa7a$ është numër çift dhe shumëfish i numrit 3. Meqë është numër çift, atëherë $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ (nuk mund të jetë 0 meqë a është shifra e parë). Meqë është shumëfish i numrit 3, atëherë shuma e shifrave $a + 7 + a + a + 7 + a = 4a + 14$ është shumëfish i numrit 3. Duke i provuar katër vlerat nga sipër, kjo është e mundur vetëm për $a = 4$.

10. Për çdo numër natyrorë n nga 1 deri në 200, Beni shënoi në tabelë raportin e n me pjesëtuesin e dytë më të madh të n (pra pjesëtuesin më të madh pas vetvetes). Për shembull, për $n = 16$ ai shënoi numrin 2, meqë $2 = \frac{16}{8}$, ndërsa për $n = 7$ ai shënoi numrin 7. Sa herë e shënoi Beni numrin 5 në tabelë?

- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Le të jetë n një numër natyror nga 1 deri në 200. Nëse n është i përbërë, pjesëtuesi më i vogël i mirëfilltë i tij është gjithmonë një numër i thjeshtë. Po e

shënojmë atë me p . Atëherë pjesëtuesi i dytë më i madh i n ka formën $\frac{n}{p}$. Raporti të cilin Beni e shënon në tabelë është

$$\frac{\frac{n}{p}}{p} = p.$$

Ndërkaq, nëse numri n është i thjeshtë, atëherë pjesëtuesi i dytë më i madh është 1 dhe raporti që shënon Beni është $\frac{n}{1} = n$. Pra, për çdo numër nga 1 deri në 200, Beni e shënon vet atë numër nëse ai është i thjeshtë ose e shënonen pjesëtuesin më të vogël të tij nëse ai numër është i përbërë.

Numri 5 do të shënohet në tabelë për $n = 5$ dhe për të gjithë numrat tjerë, pjesëtuesi më i vogël i të cilëve është numri 5. Me fjalë të tjera, duhet të gjejmë sa numra nga 1 deri në 200 plotpjesëtohen me 5, por jo me 2 ose me 3.

Këtë mund ta bëjmë duke marrë të gjithë numrat që plotpjesëtohen me 5 dhe duke i larguar nga ta ata që plotpjesëtohen me 2 ose me 3. Vërejmë që këta që do t'i largojmë janë pikërisht numrat që plotpjesëtohen me 10 ose me 15. Por, duhet të kemi kujdes, sepse duke i larguar shumëfishat e 10 dhe shumëfishat e 15, i largojmë dy herë shumëfishat e 30, prandaj ata duhet t'i kthejmë. Rezultati i kërkuar është

$$\left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{30} \right\rfloor = 40 - 20 - 13 + 6 = 13.$$