

Olimpiada Matematike Komunale 2026

Klasa XII

1. Në një takim morrën pjesë 10 persona. Secili person shtrëngoi duarë me 9 persona tjerë, përpos dy personave të cilët shtrënguan duarë me nga 8 persona tjerë. Sa shtrëngime duarsh ndodhën gjithsej në këtë takim?

(A) 44 (B) 45 (C) 88 (D) 89 (E) 90

Përgjigjja: (A)

Zgjidhje: Nëse i mbledhim të gjithë numrat e shtrëngimeve të duarve për çdo person fitojmë $8 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 88$. Por, në këtë mënyrë jemi duke e numëruar secilin shtrëngim të duarve dy herë. Prandaj, rezultati është $\frac{88}{2} = 44$.

2. Sa është vlera e shprehjes

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2026 \cdot 2027 - 1^2 - 2^2 - \dots - 2026^2$$

(A) 2026 (B) $\frac{2026 \cdot 2027}{2}$ (C) 2026^2 (D) $2026 \cdot 2027$ (E) 2027^2

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Kemi

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2026 \cdot 2027 - 1^2 - 2^2 - \dots - 2026^2 \\ &= 1 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot (3 - 2) + \dots + 2026 \cdot (2027 - 2026) \\ &= 1 + 2 + \dots + 2026 \\ &= \frac{2026 \cdot 2027}{2}. \end{aligned}$$

3. Le të jetë $f(\frac{1-x}{2026}) = x + 2025$. Gjeni vlerën e $f(f(1))$.

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2026 (E) 4051

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Fillimisht gjejmë vlerën e $f(1)$. Marrim $x = -2025$ dhe fitojmë $f(\frac{1-(-2025)}{2026}) = f(1) = -2025 + 2025 = 0$. Për $x = 1$ kemi $f(0) = 1 + 2025 = 2026$. Prandaj, $f(f(1)) = f(0) = 2026$.

4. Në çdo katrorë të tabelës me dimensione 4×4 shënohet një numër, në atë mënyrë që shuma e numrave në çdo rresht dhe në çdo shtyllë të jetë e njëjtë. Disa prej numrave janë shfaqur më poshtë.

	11	7	
6			6
9			?
	8	2	

Cili numër duhet te vendoset te katrori i shënuar me "??".

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

Përgjigjja: (A)

Zgjidhje: Le të jetë x numri në katrorin me "?". Sipas kushtit të detyrës, numrat në dy rreshtat e gjelber kanë të njëjtën shumë sikur numrat në dy shtyllat e kaltra. Meqë katër numrat në mes janë të përbashkët, ata mund ti largojmë nga të dy shumatat duke e ruajtur barazimin dhe kështu fitojmë

$$6 + 9 + 6 + x = 11 + 7 + 8 + 2,$$

e cila na jep $x = 7$.

	11	7	
6			6
9			?
	8	2	

5. Në një bashkësi S të numrave natyrorë, ekziston një element që është më i madh se prodhimi i të gjithë elementeve tjera të bashkësisë. Nëse shumta e elementeve në këtë bashkësi është 10000, sa elemente mund t'i ketë më së shumti bashkësia S ?

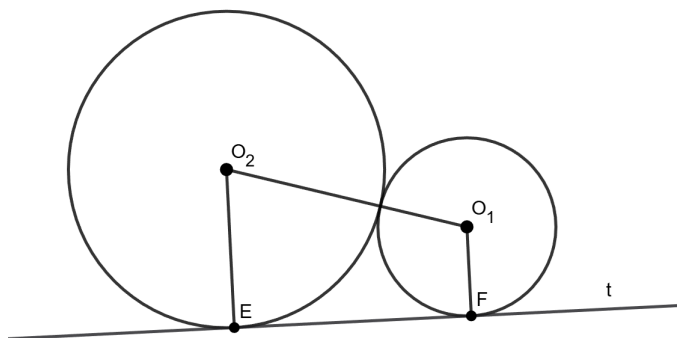
- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Prodhimi i tetë numrave të ndryshëm është të paktën $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 = 40320 > 10000$. Prandaj, bashkësia nuk mund t'i ketë 9 ose më shumë elemente. Një bashkësi e tillë me 8 elemente është $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9972\}$

6. Janë dhënë dy rrathë tangjent me qendra O_1, O_2 dhe rreze $r_1 = 1\text{cm}$, $r_2 = 2\text{cm}$ përkatësisht. Drejtëza t është tangjente në të dy rrathët dhe E dhe F janë pikëprerjet e saj me ta. Sa është syprina e katërkëndëshit EFO_1O_2 ?

(Figura shërben për ilustrim. Madhësitë e paraqitura në të nuk janë të sakta.)



- (A) $2\sqrt{2}\text{cm}^2$ (B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}\text{cm}^2$ (C) $3\sqrt{2}\text{cm}^2$ (D) $2\sqrt{5}\text{cm}^2$ (E) $\frac{7\sqrt{2}}{2}\text{cm}^2$

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Meqë drejtëza t është tangjent, atëherë $\angle O_2EF = \angle O_1FE = 90^\circ$. Kjo do të thotë që $O_2E \parallel O_1F$, pra katërkëndëshi EFO_1O_2 është trapez kënddrejtë. Kemi $O_2E = 2\text{cm}$ dhe $O_1E = 1\text{cm}$, prandaj na nevojitet vetëm edhe gjatësia e lartësisë EF .

Le të jetë M mesi i O_2E . Atëherë $EM = FO_1 = 1\text{cm}$, prandaj EFO_1M është drejtëkëndësh. Nga kjo kemi që $EF = O_1M$ dhe trekëndëshi O_2MO_1 është kënddrejtë. Nga Teorema e Pitagorës kemi

$$\begin{aligned} O_2M^2 + MO_1^2 &= O_1O_2^2 \\ \implies 1 + EF^2 &= 3^2 \\ \implies EF &= \sqrt{8}\text{cm} = 2\sqrt{2}\text{cm} \end{aligned}$$

Atëherë kemi

$$S = \frac{(EO_2 + FO_1) \cdot EF}{2} = \frac{(2 + 1) \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\text{cm}^2.$$

7. Sa dyshe (a, b) të numrave natyrorë a dhe b janë të tilla që $ab + a + b = 2024$?

(A) 9 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 16

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Kemi

$$\begin{aligned} ab + a + b + 1 &= 2025 \\ \implies (a + 1)(b + 1) &= 2025. \end{aligned}$$

Meqë $a + 1$ dhe $b + 1$ janë numra natyrorë, ata duhet të jenë pjesues të 2025 (për një pjesues d të 2025, $a + 1$ merr vlerën d ndërsa $b + 1$ merr vlerën $\frac{2025}{d}$). Numri $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ ka $5 \cdot 3 = 15$ pjesues. Numri $a + 1$ mund të jetë cilido prej tyre përpos 1, sepse në atë rast do të kishim $a = 0$ që nuk lejohet, dhe përpos 2025, sepse në atë rast do të kishim $b = 0$. Çdo pjesues tjetër jep zgjidhje të saktë të barazimit, prandaj përgjigjja është 13.

8. Janë dhënë ekuacionet kuadratike $mx^2 - x + 3n = 0$ dhe $nx^2 + 2mx + 12 = 0$, të cilat varen nga parametrat m dhe n . Vlerat e m dhe n duhet të caktohen në mënyrë që të dy ekuacionet t'i kenë të njëjtat dy zgjidhje reale. Sa është vlera e $m + n$ në këtë rast?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 3

Përgjigjja: (A)

Zgjidhje: I shfrytëzojmë formulat e Viet-it. Nëse të dy ekuacionet kanë zgjidhje të njëjta, atëherë shumta dhe prodhimi i atyre dy zgjidhjeve janë të njëjta. Për ekuacionin kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ me zgjidhje x_1 dhe x_2 kemi $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ dhe $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Atëherë

$$\begin{aligned} -\frac{(-1)}{m} &= -\frac{2m}{n} \\ \frac{3n}{m} &= \frac{12}{n}, \end{aligned}$$

nga të cilat fitojmë

$$\begin{aligned}n &= -2m^2 \\ n^2 &= 4m.\end{aligned}$$

Duke i shumëzuar këto dy ekuacioni fitojmë $n^3 = -8m^3$, që do të thotë se $n = -2m$. Duke zëvendësuar të ekuacioni i parë gjejmë $m = 1$ dhe $n = -2$, prandaj përgjigja është -1 .

Shënim: Gjatë zgjidhjes mund të supozojmë që m dhe n nuk janë zero sepse në atë rast ekuacionet nuk do t'i kishin dy zgjidhje reale.

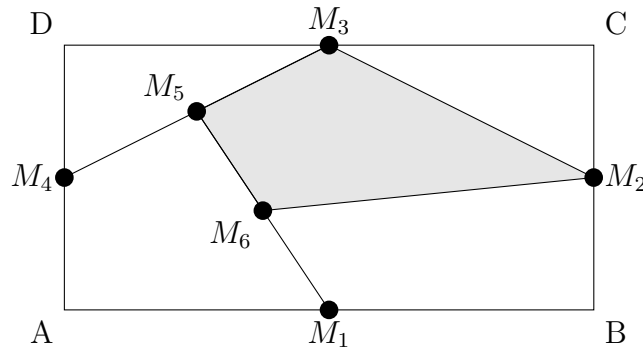
9. Prodhimi i tre numrave të njëpasnjëshëm është numri gjashtëshifror $a7aa7a$. Sa është vlera e shifrës a ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Përgjigja: (C)

Zgjidhje: Mes tre numrave të njëpasnjëshëm patjetër njëri nga ta është shumëfish i numrit 3 dhe të paktën një nga numrat është numër çift. Atëherë prodhimi i tyre $a7aa7a$ është numër çift dhe shumëfish i numrit 3. Meqë është numër çift, atëherë $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ (nuk mund të jetë 0 meqë a është shifra e parë). Meqë është shumëfish i numrit 3, atëherë shuma e shifrave $a + 7 + a + a + 7 + a = 4a + 14$ është shumëfish i numrit 3. Duke i provuar katër vlerat nga sipër, kjo është e mundur vetëm për $a = 4$.

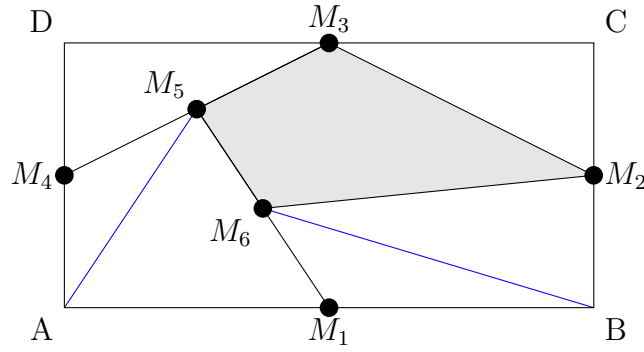
10. Është dhënë drejtkëndëshi $ABCD$ dhe pikat M_1, M_2, M_3, M_4 mase të brinjëve të drejtkëndëshit. Pika M_5 është mesi i segmentit M_3M_4 , ndërsa pika M_6 është mesi i segmentit M_1M_5 . Cili është raporti mes syprinës së hijëzuar dhe syprinës së drejtkëndëshit $ABCD$?



(A) $\frac{3}{16}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{9}{32}$ (D) $\frac{5}{16}$ (E) $\frac{3}{8}$

Përgjigja: (B)

Zgjidhje: E njehsojmë syprinën e sipërfaqes që nuk është e hijëzuar. Për ta bërë këtë, e ndajmë atë në trekëndësha adekuat.



Le të jetë $AB = CD = x$ dhe $BC = DA = y$. Për një trekëndësh $\triangle PQR$ me $S(PQR)$ do e shënojmë syprinën e tij, ndërsa me h_P do e shënojmë gjatësinë e lartësisë të lëshuar nga pika P . Tani e tutje vazhdimisht do ta shfrytëzojmë faktin që pikat M_i janë mese të segmenteve përkatëse. Kemi

$$\begin{aligned}
 S(M_2CM_3) &= S(M_3DM_4) = \frac{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}y}{2} = \frac{1}{8}xy \\
 S(AM_4M_5) &= \frac{AM_4 \cdot h_{M_5}}{2} = \frac{\frac{1}{2}y \cdot \frac{1}{4}x}{2} = \frac{1}{16}xy \\
 S(AM_1M_5) &= \frac{AM_1 \cdot h_{M_5}}{2} = \frac{\frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{4}y}{2} = \frac{3}{16}xy \\
 S(BM_1M_6) &= \frac{BM_1 \cdot h_{M_6}}{2} = \frac{\frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{8}y}{2} = \frac{3}{32}xy \\
 S(BM_2M_6) &= \frac{BM_2 \cdot h_{M_6}}{2} = \frac{\frac{1}{2}y \cdot \frac{5}{8}x}{2} = \frac{5}{32}xy.
 \end{aligned}$$

Atëherë sipërfaqja e pahijëzuar ka syprinë

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{5}{32} \right) xy = \frac{24}{32}xy = \frac{3}{4}xy,$$

që do të thotë që sipërfaqja e hijëzuar ka syprinë $xy - \frac{3}{4}xy = \frac{1}{4}xy$ dhe raporti i kërkuar është $\frac{1}{4}$.