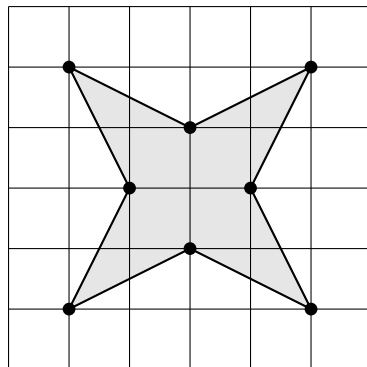


Olimpiada Matematike Komunale 2026

Klasa VIII - Zgjidhjet

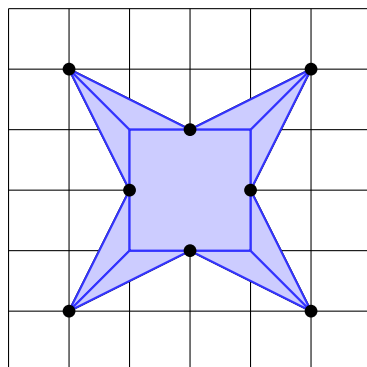
1. Figura e mëposhtme përbëhet prej 36 katrorëve njësi me gjatësi brinje 1cm . Sa është syprina e pjesës së hijëzuar?



- (A) 6cm^2 (B) 8cm^2 (C) 9cm^2 (D) 10cm^2 (E) 12cm^2

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Rezultati arrihet duke e ndarë figurën në trekëndësja dhe katrorë adekuatë, syprina e të cilëve njehësohet lehtë.



2. Për një numër natyror n , shënojmë $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Për çfarë vlere të n vlen $n! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$?
- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Meqë ana e djathtë e barazimit e ka faktor numrin 13 dhe meqë 13 është numër i thjeshtë, atëherë ana e majtë mund ta ketë këtë faktor vetëm nëse $n \geq 13$. Tutje, vërejmë se ana e djathtë e ka vetëm një 7 si faktor, ndërsa për $n = 14$ do t'i kishim dy të tillë. Prandaj $n = 13$.

3. Sa numra dyshifrorë janë katër herë më të mëdhenj se shuma e shifrave të tyre?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Shënojmë me $\overline{ab}$ numrin dyshifror me shifrat a dhe b . Kemi

$$4(a + b) = \overline{ab} = 10a + b,$$

prej nga fitojmë $6a = 3b$, ose ndryshe $b = 2a$. Andaj mundësitë e vetme janë numrat 12, 24, 36 dhe 48.

4. Janë dhënë numrat $a = 2^{11} \cdot 3^9$, $b = 8^4 \cdot 3^9$ dhe $c = 6^{10}$. Cila është renditja e saktë sipas madhësive?
(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < a < c$ (D) $c < a < b$ (E) $c < b < a$

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: I kthejmë të tre numrat sipas fuqive të 2 dhe 3. Kemi $a = 2^{11} \cdot 3^9$, $b = (2^3)^4 \cdot 3^9 = 2^{12} \cdot 3^9$ dhe $c = (2 \cdot 3)^{10} = 2^{10} \cdot 3^{10}$. Vërejmë se të tre numrat e kanë të përbashkët faktorin $k = 2^{10} \cdot 3^9$ dhe kemi $a = 2k$, $c = 3k$ dhe $b = 4k$. Prandaj $a < c < b$.

5. Ana dëshiron të formojë një numër pesëshifror duke përdorur secilën nga shifrat 1, 2, 3, 4, 5 saktësisht një herë. Ajo dëshiron që numri që formohet të jetë shumëfish i numrit 4. Sa mundësi të ndryshme ka ajo për ta formuar këtë numër?
(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 24

Përgjigjja: (E)

Zgjidhje: Që numri të jetë shumëfish i numrit 4, duhet që dy shifrat e fundit të formojnë numër që plotpjestohet me 4. Duke pasë parasysh që shifra e fundit patjetër duhet të jetë numër çift (pra 2 ose 4), kemi këto katër mundësi: 12, 32, 52 dhe 24. Për secilin nga këto katër kombinime, tre shifrat e para i kanë 6 mundësi të renditjes (për shembull për rastin kur shifrat e fundit janë 12 kemi 34512, 35412, 43512, 45312, 53412 dhe 54312). Prandaj numri total i kombinimeve është $4 \cdot 6 = 24$.

6. Numrat 1, 2, 3, 4, 5 duhet të renditen në mënyrë të tillë që shuma e çdo dy numrave fqinjë të jetë numër i thjeshtë. Në sa mënyra të ndryshme mund të bëhet kjo?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

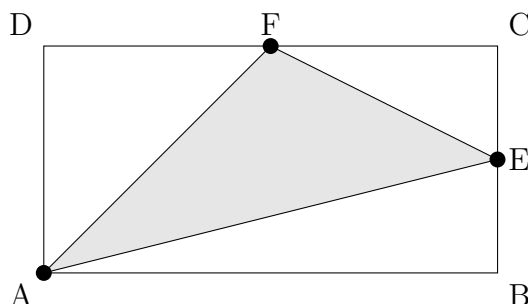
Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Në numrin që e formojmë nuk mund t'i vendosim pranë dy numra çift ose dy numra tek sepse shuma e tyre do të na jep numër çift më të madh se 2, pra numër të përbërë. Atëherë numri që e formojmë duket kështu:

tek çift tek çift tek.

Numri 5 nuk duhet të vendoset pranë numrit 4. Atëherë kemi këto katër mundësi: 52143, 52341, 14325, 34125.

7. Është dhënë drejtëkëndëshi $ABCD$. Pikat E dhe F janë mese të brinjëve BC dhe CD përkatësisht. Cili është raporti mes syprinës së sipërfaqes së hijëzuar dhe syprinës së drejtëkëndëshit $ABCD$?



- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{5}{8}$

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Le të jenë a, b gjatësitë e brinjëve të drejtëkëndëshit. E njehsojmë syprinën e pjesës së pahijëzuar. Ajo përbëhet prej tre trekëndëshave $\triangle ABE$, $\triangle CEF$, $\triangle AFD$, syprinat e të cilëve janë $\frac{1}{4}ab$, $\frac{1}{8}ab$, $\frac{1}{4}ab$ përkatësisht. Atëherë syprina e sipërfaqes së hijëzuar është $ab - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{3}{8}ab$. Raporti i kërkuar është $\frac{3}{8}$.

8. Cili nga pohimet e mëposhtme nuk është i saktë për çdo numër real x të tillë që $-1 < x < 2$?

- (A) $-1 < \frac{x}{2} < 2$ (B) $-5 < 2x < 5$ (C) $|x| < 2$ (D) $-1 < \frac{2x-1}{3} < 1$ (E) $1 < x^2 < 4$

Përgjigjja: (E)

Zgjidhje: Jobarazimi nën (E) nuk është i saktë për çdo numër x mes -1 dhe 2 . Për shembull, për $x = 0$ kemi $x^2 < 1$.

9. Beni formon tre thyesa duke e vendosur secilin nga numrat $1, 2, 3, 4, 5, 6$ në numërues ose emërues të ndonjëres thyese. Nga të gjitha mënyrat e ndryshme se si Beni mund t'i formojë këto tre thyesa, sa është vlera më e vogël e mundshme e shumës së tyre?

- (A) $\frac{13}{12}$ (B) $\frac{23}{20}$ (C) $\frac{79}{60}$ (D) $\frac{29}{20}$ (E) $\frac{25}{12}$

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Shuma ka formën

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f},$$

ku $\{a, b, c, d, e, f\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mund ta mendojmë këtë shumë si a thyesa të formës $\frac{1}{d}$, b thyesa të formës $\frac{1}{e}$ dhe c thyesa të formës $\frac{1}{f}$. Për të qenë vlera sa më e vogël, duhet që të kemi sa më pak thyesa dhe thyesat të kenë vlerë sa më të vogël (pra emërues sa më të madh). Të dyja këto arrihen nëse marrim a, b, c nga $\{1, 2, 3\}$ dhe d, e, f nga $\{4, 5, 6\}$. Tani, nga emëruesit e zgjedhur, thyesa më e vogël bazë është $\frac{1}{6}$. Vlera minimizohet nëse marrim numrin më të madh të mundshëm të thyesave të këtij lloji, pra 3 thyesa të tilla. Ngjashëm marrim 2 thyesa $\frac{1}{5}$ dhe një thyese $\frac{1}{4}$ (kjo tregohet rigorozisht përmes jobarazimit të rirenditjes). Vlera minimale që fitojmë është

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{23}{20}.$$

10. Kur një produktit iu rrit çmimi për $x\%$, çmimi u rrit për 10 euro. Pastaj, kur çmimi iu rrit përsëri për $x\%$, çmimi u rrit për 12 euro. Sa ishte çmimi fillestar i këtij produkti?

(A) 36 euro (B) 40 euro (C) 48 euro (D) 50 euro (E) 60 euro

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Le të jetë çmimi fillestar i këtij produkti a . Kemi

$$a \cdot \frac{x}{100} = 10.$$

Çmimi i ri pas rritjes së parë është $(1 + \frac{x}{100})a$. Nga rritja e dytë kemi

$$(1 + \frac{x}{100}) \cdot a \cdot \frac{x}{100} = 12,$$

dhe duke shfrytëzuar $a \cdot \frac{x}{100} = 10$ kemi

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{12}{10},$$

e cila na jep $x = 20$. Përsëri nga $a \cdot \frac{x}{100} = 10$ konkludojmë që $a = 50$.