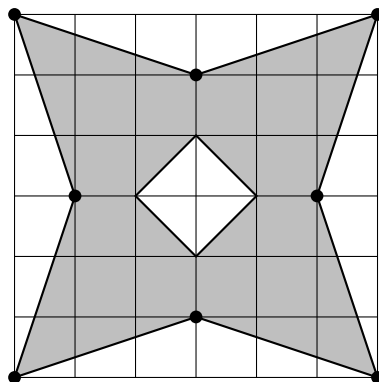


Olimpiada Matematike Komunale 2026

Klasa IX - Zgjidhjet

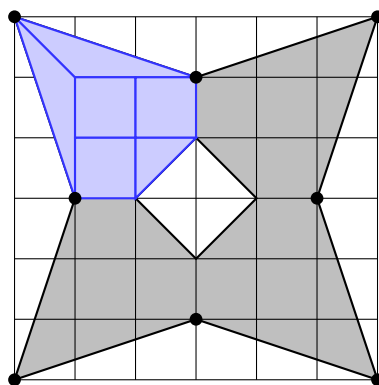
1. Figura e mëposhtme përbëhet prej 36 katrorëve njësi me gjatësi brinje 1cm . Sa është syprina e pjesës së hijëzuar?



- (A) 20cm^2 (B) 22cm^2 (C) 24cm^2 (D) 25cm^2 (E) 26cm^2

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Rezultati arrihet duke e ndarë figurën në trekëndësja dhe katrorë adekuatë. Në figurë është paraqitur ndarja e njërit kuadrant. Për shkak të simetrisë, syprina e përgjithshme është sa katërfishi i syprinës së këtij kuadranti.



2. Beni shënon në tabelë numrat $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, \dots$, e kështu me radhë. Cili është numri i 2026-të me radhë të cilin ai e shënon?

- (A) 62 (B) 63 (C) 64 (D) 65 (E) 66

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Ndërrimi i numrave ndodh në pozitat e formës $1 + 2 + \dots + k$, pas së cilës ndodh kalimi nga k në $k + 1$. Duke ditur se $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, duhet gjetur numri natyror n më i vogël i tillë që $\frac{n(n+1)}{2} \geq 2026$. Përgjigjja $n = 64$ mund të gjendet pas disa tentimeve, ose përmes zgjidhjes së inekuacionit kuadratik.

3. Në një pellg ndodhen 2026 gurë të vendosur në formë rrethore. Gurët janë të shënuar me numrat $1, 2, \dots, 2026$ në drejtim të akrepave të orës. Një bretkosë kërcen nga guri në gur. Kur ajo ndodhet te guri me numrin k , ajo kërcen në drejtim të akrepave të orës duke i kapërcyer k gurë. Për shembull, nëse ndodhet te guri me numrin 4, ajo i kapërcen 4 gurë dhe kërcen te guri me numrin 9. Nëse bretkosa fillon prej gurit me numrin 1, në cilin gur do të kërcejë ajo së pari pasi ta ketë bërë një rrotullim të plotë rreth gurëve?

(A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 26 (E) 47

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Vërejmë që sipas rregullës së detyrës, bretkosa kërcen nga guri me numër k te guri me numër $2k + 1$ (para se të bëjë një rrotullim të plotë). Eventualisht ajo do të arrijë te guri me numër 1023 (kjo mund të tregohet edhe duke e vërejtur që kur bretkosa fillon prej gurit me numër 1, ajo kërcen nëpër gurët me numër një më pak se fuqitë e 2). Guri i radhës do të duhej të ishte ai me numër 2047, por meqë pas gurit me numër 2026 numrat përsëriten, guri ku ajo zbarkon ka numrin $2047 - 2026 = 21$.

4. Sa është vlera e shprehjes

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{2026}\right)?$$

(A) $\frac{1}{2026}$ (B) $\frac{1}{2025}$ (C) $\frac{1}{2025 \cdot 2026}$ (D) $\frac{1}{1013 \cdot 2025}$ (E) $\frac{1}{1013}$

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Kemi

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{2026}\right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{2023}{2025} \cdot \frac{2024}{2026} \\ &= \frac{1 \cdot 2}{2025 \cdot 2026} \\ &= \frac{1}{1013 \cdot 2025}. \end{aligned}$$

5. Sa dyshe (a, b) të numrave natyrorë a dhe b janë të tilla që $ab + a + b = 120$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Përgjigjja: (B)

Zgjidhje: Kemi

$$\begin{aligned} ab + a + b &= 120 \\ ab + a + b + 1 &= 121 \\ (a + 1)(b + 1) &= 11 \cdot 11 \end{aligned}$$

Numrat $a + 1$ dhe $b + 1$ janë numra natyrorë më të mëdhenj se 1, prandaj e vetmja mundësi që ky barazim të vlejë është që $a + 1 = b + 1 = 11$, pra $a = b = 10$.

6. Në një bashkësi S të numrave natyrorë, ekziston një element që është më i madh se prodhimi i të gjitha elementeve tjera të bashkësisë. Nëse shuma e elementeve në këtë bashkësi është 2026, sa elemente mund t'i ketë më së shumti bashkësia S ?

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 10

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Prodhimi i shtatë numrave të ndryshëm është të paktën $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 = 5040 > 2026$. Prandaj, bashkësia nuk mund t'i ketë 8 ose më shumë elemente. Një bashkësi e tillë me 7 elemente është $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 2005\}$.

7. Kur një produktit iu rrit çmimi për $x\%$, çmimi u rrit për 10 euro. Pastaj, kur çmimi iu rrit përsëri për $x\%$, çmimi u rrit për 14 euro. Sa ishte çmimi fillestar i këtij produkti?

(A) 20 euro (B) 24 euro (C) 25 euro (D) 28 euro (E) 30 euro

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Le të jetë çmimi fillestar i këtij produkti a . Kemi

$$a \cdot \frac{x}{100} = 10.$$

Çmimi i ri pas rritjes së parë është $(1 + \frac{x}{100})a$. Nga rritja e dytë kemi

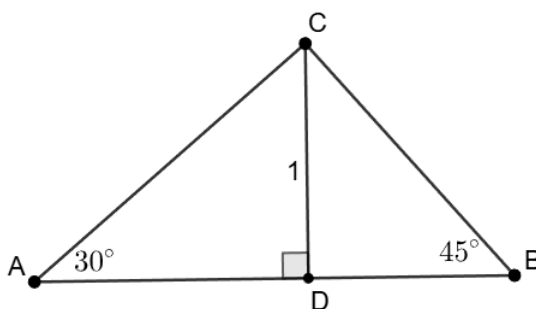
$$(1 + \frac{x}{100}) \cdot a \cdot \frac{x}{100} = 14,$$

dhe duke shfrytëzuar $a \cdot \frac{x}{100} = 10$ kemi

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{14}{10},$$

e cila na jep $x = 40$. Përsëri nga $a \cdot \frac{x}{100} = 10$ konkludojmë që $a = 25$.

8. Në trekëndëshin $\triangle ABC$ është dhënë lartësia CD me gjatësi 1cm dhe këndet $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle CBA = 45^\circ$. Sa është perimetri i trekëndëshit $\triangle ABC$?



(A) $3 + \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ (C) $3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ (E) $3 + 3\sqrt{2}$

Përgjigjja: (C)

Zgjidhje: Trekëndëshi $\triangle ADC$ ka kënde $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, prandaj gjatësitë e brinjëve të tij qëndrojnë në raport $1 : \sqrt{3} : 2$. Kjo mund të tregohet duke konsideruar reflektimin C' të pikës C ndaj pikës D dhe duke shfrytëzuar faktin që trekëndëshi $\triangle ACC'$ është barabrinjës. Pra kemi gjatësitë $AD = \sqrt{3}\text{cm}$ dhe $AC = 2\text{cm}$. Në anën tjetër trekëndëshi $\triangle BDC$ është barakrahësh, prandaj $BD = 1\text{cm}$ dhe nga teorema e Pitagorës $BC = \sqrt{2}\text{cm}$. Atëherë perimetri në centimetra është $2 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

9. Në çdo katror të tabelës me dimensione 4×4 shënohet një numër, në atë mënyrë që shuma e numrave në çdo rresht dhe në çdo shtyllë të jetë e njëjtë. Disa prej numrave janë shfaqur më poshtë.

3	13		
10	8		
		9	7
		4	?

Cili numër duhet të vendoset te katrori i shënuar me "?"

- (A) 3 (B) 8 (C) 11 (D) 14 (E) Nuk mund të përcaktohet

Përgjigjja: (D)

Zgjidhje: Le të jetë x numri në katrorin me "?". Meqë çdo shtyllë dhe çdo rresht ka shumë të njëjtë, dy shtyllat e kaltra kanë të njëjtën shumë si dy rreshtat e gjelbër. Meqë numrat në katrorin 2×2 poshtë majtas janë të përbashkët, atëherë ata mund t'i largojmë dhe shuma e numrave të tjerë mbetet e barabartë. Pra $3 + 13 + 10 + 8 = 9 + 7 + 4 + x$. Nga këtu gjejmë se $x = 14$.

3	13		
10	8		
		9	7
		4	?

10. Një aparat përmban 36 lodra të shënuara me numrat nga 1 deri në 36. Kur paguajmë N euro, aparati na i jep N lodra të zgjedhura në mënyrë të rastësishme. Ana dëshiron t'i ketë dy lodra, numrat e të cilave dallojnë për 3. Sa euro duhet t'i paguajë ajo të paktën për ta garantuar që do t'i merr dy lodra të tilla?

- (A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 18 (E) 19

Përgjigjja: (E)

Zgjidhje: 18 euro nuk mjaftojnë, sepse aparati mund t'i japë 18 lodrat me numra

1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 31, 32, 33

mes të cilave nuk ekzistojnë dy numra që dallojnë për 3.

Për ta vërtetuar që 19 funksionon, i ndajmë numrat nëpër tre grupe sipas mbetjes gjatë pjesëtimit me 3 (pra mod 3). Vërejmë që nëse dy numra dallojnë për 3, ata duhet t'i takojnë të njëjtit grup. I shënojmë numrat sipas grupeve

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36

Secili grup ka 12 elemente. Dy numra dallojnë për 3 vetëm nëse janë fqinjë në rresht. Nëse zgjedhen 19 numra në total, atëherë patjetër do të zgjedhen të paktën 7 numra nga njëri grup, e meqë një grup përmban 12 elemente, atëherë të paktën dy prej numrave të zgjedhur do të jenë fqinjë, pra do të dallojnë për 3.

Shënim: Fakti që me zgjedhjen e 7 ose më shumë numrave nga një rresht ekzistojnë dy numra fqinjë të zgjedhur mund të vërtetohet duke i ndarë numrat dy nga dy në 6 çifte (i pari me të dytin, i tretë me të katërtin, e kështu me radhë). Atëherë është e qartë që kur zgjedhim të paktën 7 numra, duhet patjetër t'i zgjedhim dy nga i njëjti çift.