

OLIMPIADA MATEMATIKE E KOSOVËS 2026

KLASA XI - ZGJIDHJET

18 JANAR 2026

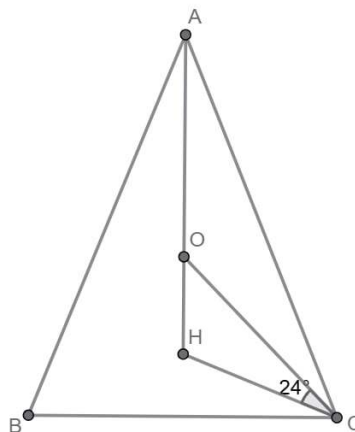
1. Le të jetë $\triangle ABC$ trekëndësh këndngushtë dhe le të jenë H ortoqendra dhe O qendra e rrethit të jashtëshkruar të tij. Supozojmë që O gjendet në segmentin AH . Nëse $\angle HCO = 24^\circ$, gjeni të gjitha këndet e trekëndëshit $\triangle ABC$.

Zgjidhje. Pika O gjendet në përmesoren e brinjës BC . Pasi që O është në AH , i bie që AO është normale në BC , prandaj A është në përmesoren e brinjës BC . Nga kjo kemi që $AB = AC$. Le të jetë $\angle OAC = \alpha$. Pasi që AO është edhe përgjysmore e $\angle BAC$ kemi që $\angle BAC = 2\alpha$, prej nga $\angle ABC = 90^\circ - \alpha = \angle ACB$. Pasi që CH normale në AB kemi që $\angle HCB = 90^\circ - \angle ABC = \alpha$. Tutje, pasi që $OA = OC$ kemi që $\angle OCA = \angle OAC = \alpha$. Tani

$$90^\circ - \alpha = \angle ACB = \angle OCA + \angle OCH + \angle HCB = 2\alpha + 24^\circ \iff \alpha = 22^\circ$$

$$\iff \angle ABC = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ.$$

Pasi që $AB = AC$ kemi që $\angle ACB = 68^\circ$ dhe $\angle BAC = 180^\circ - 2\angle ABC = 44^\circ$.

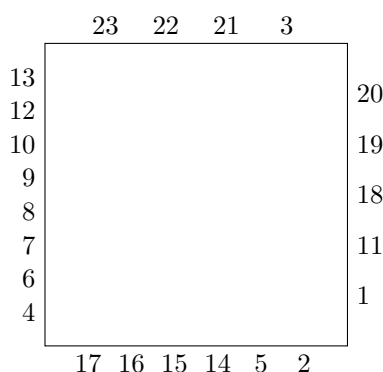


2. Beni ka n shkopingjë me gjatësi $1, 2, \dots, n$. Ai dëshiron të formojë një katror duke i përdorur secilin nga këta shkopingjë për t'i ndërtuar brinjët e katrorit, në atë mënyrë që secila brinjë të ketë numër të ndryshëm të shkopingjëve. Cila është vlera më e vogël e n për të cilën ai mund ta bëjë këtë?

Zgjidhje. Meqë çdo brinjë duhet të ketë numër të ndryshëm të shkopingjëve, atëherë duhen të paktën $1+2+3+4 = 10$ shkopingjë, pra $n \geq 10$. Shuma e gjatësive të shkopingjëve është $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Meqë brinjët e katrorit duhet të kenë gjatësi të barabartë, atëherë secila brinjë ka gjatësi $\frac{n(n+1)/2}{4} = \frac{n(n+1)}{8}$. Kjo gjatësi duhet të jetë numër i plotë, prandaj n ose $n+1$ duhet të jetë shumëfish i numrit 8.

Numri i parë që plotëson këto kushte është $n = 15$. Për $n = 15$, gjatësia e brinjëve është $\frac{15 \cdot 16}{8} = 30$. Por, meqë $15 + 14 = 29 < 30$, atëherë çdo brinjë duhet t'i përmbajë të paktën 3 shkopingjë, e meqë të gjitha brinjët kanë numër të ndryshëm të shkopingjëve, atëherë numri i shkopingjëve është të paktën $3 + 4 + 5 + 6 = 18$, që është më shumë se që kemi. Në të njëjtën mënyrë tregohet që edhe $n = 16$ nuk bën.

Numri i radhës që plotëson kushtet është $n = 23$. Për $n = 23$, shuma e brinjëve është $\frac{23 \cdot 24}{8} = 69$. Një konfiguracion që funksionon është ky:



3. Ana dhe Beni luajnë si vijon. Së pari, secilit numër të thjeshtë p , Ana ia cakton një numër natyror a_p . Ajo duhet që numrave të ndryshëm $p \neq q$ t'i caktojë numra të ndryshëm $a_p \neq a_q$. Duke i ditur numrat që ka zgjedhur Ana, Beni zgjedh disa numra të thjeshtë sipas dëshirës $r_1, r_2, \dots, r_k$, jo-domosdoshmërisht të ndryshëm. Megjithatë, për çdo numër të thjeshtë r që zgjedh Beni, ai duhet ta zgjedhë atë saktësisht a_r herë. Beni e fiton lojën nëse mund të kombinojë shenjat $+$ dhe $-$ në ndonjë mënyrë të tillë që numri

$$\pm \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \pm \dots \pm \frac{1}{r_k}$$

është numër i plotë, përndryshe lojën e fiton Ana. Cili nga lojtarët ka strategji të fitores?

Zgjidhje. Ana ka strategji të fitores. Ajo cakton $a_2 = 7$, dhe $a_p = p - 2$ për çdo numër të thjeshtë $p \geq 3$, që qartazi plotëson kushtin (pasi $7 + 2 = 9$ nuk është numër i thjeshtë). Le të jenë $p_1, p_2, \dots, p_s$ numrat e ndryshëm që zgjedh Beni dhe le të jenë $a_1, a_2, \dots, a_s$ numrat që i cakton Ana numrave të Benit, pra $a_i = a_{p_i}$ për çdo $1 \leq i \leq s$. Çfarëdo kombinimi të shenjave që ai bën rezulton në shprehjen

$$\frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} + \dots + \frac{b_s}{p_s},$$

ku $b_1, \dots, b_s$ janë numra të plotë të tillë që $|b_i| \leq a_i$ për çdo $1 \leq i \leq s$. Pasi a_i është tek për çdo $1 \leq i \leq s$, kemi se b_i është poashtu numër tek. Poashtu, për çdo numër tek p_i kemi $|b_i| \leq a_i < p_i$. Në veçanti vlen $b_i \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ për çdo $1 \leq i \leq s$. Tutje

$$\frac{b_1}{p_1} + \frac{b_2}{p_2} + \dots + \frac{b_s}{p_s} = \frac{b_1 p_2 \dots p_s + b_2 p_1 p_3 \dots p_s + \dots + b_s p_1 p_2 \dots p_{s-1}}{p_1 p_2 \dots p_s}.$$

Tani p_1 e plotpjesëton secilin nga monomet në numërues, përveç $b_1 p_2 p_3 \dots p_s$ që nuk plotpjesëtohet me p_1 meqë $b_1 \not\equiv 0 \pmod{p_1}$. Përfundojmë se ky numër nuk mund të jetë i plotë.

4. Le të jetë n numër natyror dhe a, b, c numra realë të tillë që

$$\sqrt{n} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}}.$$

Tregoni që ekzistojnë numrat $x, y, z \in \{-1, 0, 1\}$ ku të paktën njëri prej tyre është jo-zero, të tillë që $ax + by + cz = 0$.

Zgjidhje. Nga mosbarazimi i Koshit kemi që $a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3}$ prandaj

$$\sqrt{n} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}} \leq \sqrt{3} \Rightarrow n \leq 3.$$

Rasti 1. $n = 1$.

Kemi $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}} = 1$. Duke ngritur në kator dhe pas rregullimeve kemi $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = 0$, prandaj $ab = bc = ca = 0$ që do të thotë që të paktën dy prej numrave a, b, c janë të barabartë me 0. Supozojmë që $a = b = 0$, kështu që duke marr $x = y = 1$ dhe $z = 0$ kemi $ax + by + cz = 0$.

Rasti 2. $n = 2$.

Kemi $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}} = \sqrt{2}$. Duke ngritur në kator dhe pas rregullimeve kemi

$$(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 0.$$

Prandaj të paktën njëri nga numrat $a + b + c, a + b - c, b + c - a, c + a - b$ është 0, kështu që ekzistojnë numrat $x, y, z \in \{-1, 1\}$ të tillë që $ax + by + cz = 0$.

Rasti 3. $n = 3$

Kemi $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}} = \sqrt{3}$. Duke ngritur në kator dhe pas rregullimeve kemi

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 0,$$

prandaj $a^2 - b^2 = b^2 - c^2 = c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2$, kështu që të paktën dy prej numrave a, b, c janë të barabartë. Supozojmë që $a = b$, kështu që duke marr $x = 1, y = -1$ dhe $z = 0$ kemi $ax + by + cz = 0$.