



Shoqata e Matematikanëve të Kosovës
Kosovar Mathematical Society

OLIMPIADA MATEMATIKE E KOSOVËS 2026

KLASA VII - ZGJIDHJET

18 JANAR 2026

1. Disa persona morën pjesë në një turne shahu. Secili person luajti saktësisht një herë me secilin person tjetër dhe asnjë lojë nuk përfundoi në barazim. Në çdo lojë, fituesi mori një pikë ndërsa humbësi mori zero pikë. A është e mundur që të gjithë personat përveç njërit të kenë numër të barabartë të pikëve nëse në turne morën pjesë:

(a) 4 lojtarë?

(b) 5 lojtarë?

Zgjidhje: (a) Po, është e mundur. Le të jenë katër lojtarët A, B, C, D . Nëse A, B, C fitojnë kundër D dhe A fiton kundër B , B fiton kundër C , C fiton kundër A , atëherë të tre lojtarët A, B, C do të kenë nga 2 pikë, ndërsa lojtari D do të ketë 0 pikë.

(b) Jo, nuk është e mundur. Supozojmë që katër lojtarë kanë të njëjtin numër të pikëve x , ndërsa lojtari tjetër ka y pikë. Meqë në total janë zhvilluar $10 (= \binom{5}{2})$ lojë, atëherë janë fituar 10 pikë në total. Kështu që duke i mbledhur pikët e të gjithëve kemi

$$4x + y = 10.$$

x nuk mund të jetë 3 ose më shumë sepse y do të merrte vlerë negative. Nëse $x = 2$, atëherë $y = 10 - 4 \cdot 2 = 2$, pra të gjithë kanë numër të njëjtë të pikëve, që nuk bën. Nëse $x \leq 1$ atëherë $y \geq 6$, që nuk është e mundur sepse një lojtar nuk mund të ketë më shumë se 4 pikë. Përfundojmë që nuk është e mundur që të gjithë lojtarët përveç njërit të kenë pikë të barabarta.

2. Le të jenë a, b, c numra realë të tillë që

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b}{a} = 1.$$

Gjeni vlerën numerike të shprehjes

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

Zgjidhje 1. Duke shumëzuar me ca kemi që

$$a(a-b) + bc = ca,$$

prej nga kemi që

$$a(a-b) + c(b-a) = 0 \iff (a-b)(a-c) = 0,$$

prandaj $a = b$ ose $a = c$.

Nëse $a = b$ kemi

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - a^2}{c^2} + \frac{a^2}{a^2} = 0 + 1 = 1.$$

Nëse $a = c$ kemi

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

Pra vlera numerike është 1.

Zgjidhje 2. Nga kushti kemi që $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{c}$. Duke e ngritur në katror kemi që $\frac{a^2}{c^2} + \frac{2b}{c} + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{2b}{c} + \frac{b^2}{c^2}$, nga kemi që $\frac{a^2 - b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1$.

3. Beni zgjedh katër shifra të ndryshme nga bashkësia $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Nga të gjithë numrat katërshifrorë që ai mund të formojë duke i përdorur secilën nga shifrat që i ka zgjedhur, ai shkruan numrin e dytë më të madh dhe numrin e dytë më të vogël. Dihet se ndryshimi i këtyre dy numrave plotpjesëtohet me 43. Gjeni të gjitha mundësitë për shifrat që ka zgjedhur Beni.

Zgjidhje. Le të jenë $a > b > c > d$ shifrat që ka zgjedhur Beni. Atëherë Beni ka shkruar numrat $\overline{abcd}$ dhe $\overline{dcab}$. Nga kushti kemi që $\overline{abcd} - \overline{dcab}$ plotpjesëtohet me 43. Meqë

$$\overline{abcd} - \overline{dcab} = 1000a + 100b + 10d + c - 1000d - 100c - 10a - b = 990a + 99b - 99c - 990d = 99(10(a - d) + b - c),$$

dhe meqë qartazi 99 nuk ka faktorë të përbashkët me 43, kemi që $10(a - d) + b - c$ plotpjesëtohet me 43.

Qartazi $a - d$ dhe $b - c$ janë numra njëshifrorë jo-zero, andaj le të shënojmë $a - d = x$ dhe $b - c = y$, nga kemi që $10(a - d) + b - c$ është numri dyshifrorë $\overline{xy}$. Meqë $\overline{xy}$ plotpjesëtohet me 43 kemi që $\overline{xy} \in \{43, 86\}$.

Nëse $x = 4$ dhe $y = 3$, kemi që $a - d = 4$ dhe $b - c = 3$. Por meqë $b - c = 3$ kemi që $b - d \geq 4$ andaj $a - d \geq 5$, që nuk është e mundur.

Nëse $x = 8$ dhe $y = 6$, kemi që $a - d = 8$ dhe $b - c = 6$. E vetmja mundësi që $a - d = 8$ është që $a = 9$ dhe $d = 1$. Nga kemi që $b, c \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dhe $b - c = 6$ që është e mundur vetëm kur $b = 8$ dhe $c = 2$.

Përfundojmë që Beni ka zgjedhur numrat 1, 2, 8, 9.

4. Është dhënë trekëndëshi $\triangle ABC$ dhe M mesi i brinjës BC . Përmesoret e brinjëve AB dhe AC e presin brinjën BC në pikat D dhe E , përkatësisht. Nëse $MD = ME$, tregoni që trekëndëshi $\triangle ABC$ është barakrahësh.

Zgjidhje. Gjatë zgjidhjes do të përdorim këtë fakt: për segmentin YZ kemi që $XY = XZ$ atëherë dhe vetëm atëherë kur X gjendet në përmesoren e segmentit YZ .

Vërejmë se pasi që D është në përmesoren e brinjës AB kemi që $AD = DB = DM + MB = EM + MC = EC = AE$ ku barazimi i fundit rrjedh nga fakti që E gjendet në përmesoren e brinjës AC . Pasi që $AD = AE$ kemi që A gjendet në përmesoren e segmentit DE , e cila është poashtu përmesorja e brinjës BC , prandaj $AB = AC$, gjë që duhej vërtetuar.

