

OLIMPIADA MATEMATIKE E KOSOVËS 2026

KLASA VIII - ZGJIDHJET

18 JANAR 2026

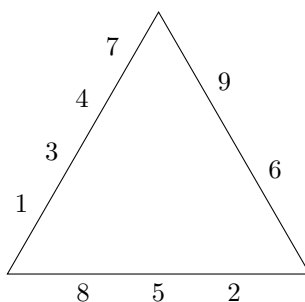
1. Beni ka n shkopiñjë me gjatësi $1, 2, \dots, n$. Ai dëshiron të formojë një trekëndësh barabrinjës duke i përdorur secilin nga këta shkopiñjë për t'i ndërtuar brinjët e trekëndëshit, në atë mënyrë që secila brinjë të ketë numër të ndryshëm të shkopiñjëve. Cila është vlera më e vogël e n për të cilën ai mund ta bëjë këtë?

Zgjidhje. Meqë çdo brinjë duhet të ketë numër të ndryshëm të shkopiñjëve, atëherë duhen të paktën $1 + 2 + 3 = 6$ shkopiñjë, pra $n \geq 6$. Shuma e gjatësive të shkopiñjëve është $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Meqë brinjët e trekëndëshit duhet të kenë gjatësi të barabartë, atëherë secila brinjë ka gjatësi $\frac{n(n+1)/2}{3} = \frac{n(n+1)}{6}$. Kjo gjatësi duhet të jetë numër i plotë, prandaj n ose $n+1$ duhet të jetë shumëfish i numrit 3.

Numri i parë që i plotëson këto kushte është $n = 6$. Për $n = 6$, gjatësia e brinjëve është $\frac{6 \cdot 7}{6} = 7$. Meqë të gjithë shkopiñjë kanë gjatësi 6 ose më pak, duhen të paktën dy shkopiñjë në çdo brinjë. Atëherë numri i shkopiñjëve që duhen gjithsej është të paktën $2 + 3 + 4 = 9$, që është më shumë se që kemi.

Në të njëjtën mënyrë tregojmë që as $n = 8$ nuk funksionon, ndërsa për $n = 7$ gjatësia nuk del numër i plotë.

Për $n = 9$ Beni mund ta formojmë trekëndëshin në këtë mënyrë:



2. Le të jenë x dhe y numra realë pozitivë të tillë që $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$. Tregoni që

$$x + y \geq 2.$$

Zgjidhje. Do përdorim faktin që nëse t është numër real, atëherë $t^2 \geq 0$. Nga kushti kemi që

$$xy = x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1 \geq 1.$$

Prandaj $xy \geq 1$. Pasi x dhe y janë numra realë pozitivë, mjafton të tregojmë se $(x + y)^2 \geq 4$. Duke përdorur kushtin përsëri dhe $xy \geq 1$ kemi

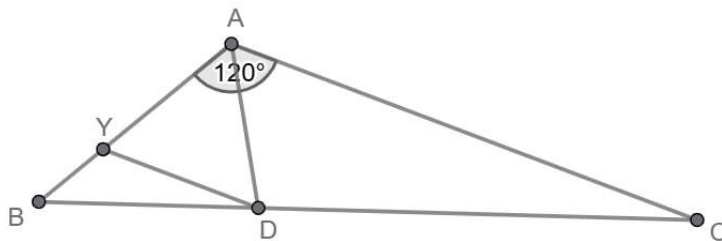
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 5xy - 1 \geq 5 \cdot 1 - 1 = 4.$$

3. Le të jetë $\triangle ABC$ trekëndësh me masën e këndit $\angle BAC = 120^\circ$ dhe gjatësitë $AB = 1$, $AC = 2$. Le të jetë D një pikë në brinjën BC e tillë që drejtëza AD e përgjysmon këndin $\angle BAC$. Gjeni gjatësinë e segmentit AD .

Zgjidhje. Le të jetë Y një pikë në AB e tillë që $YD \parallel AC$. Vërejmë se nga vetitë e paralelizmit kemi që $\angle YDA = \angle DAC = 60^\circ$, pra $\triangle AYD$ është barabrinjës. Shkruajmë me x gjatësinë e segmentit BY . Nga kjo del se $YD = AD = AY = 1 - x$. Tani, nga teorema e Talesit kemi

$$\frac{BY}{BA} = \frac{YD}{AC} \iff \frac{x}{1} = \frac{1-x}{2} \iff 2x = 1-x \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3} \iff 1-x = \frac{2}{3}.$$

Pasi që $AD = AY = 1 - x$ kemi që $AD = \frac{2}{3}$.



4. Për secilin numër natyror, Ana kryen këtë veprim: ajo mbledh të gjitha shifrat në pozitë tek të numrit dhe kësaj shume ia zbrit dyfishin e shumës së shifrave në pozitë çift. Renditjen e shifrave ajo e fillon nga e djathta, pra shifra e njëshëve është në pozitë të parë, shifra e dhjetëshëve në pozitë të dytë, e kështu me radhë. Për shembull, për numrin 1483, pas kryerjes së veprimit Ana fiton

$$\underbrace{3+4}_{\text{pozitat tek}} - 2 \times \underbrace{(8+1)}_{\text{pozitat çift}} = -11.$$

Ana vëren se ndonjëherë dy numra të ndryshëm japin rezultatin e njëjtë pas veprimit të saj. Për sa mund të ndryshojnë më së paku dy numra të tillë?

Zgjidhje. Tregojmë se ndryshimi më i vogël i mundshëm pozitiv është 3. Shkruajmë me $S(n)$ veprimin e Anës në numrin n . Së pari $1000 - 997 = 3$ dhe

$$S(997) = 9 + 7 - 2 \cdot 9 = -2 = 0 + 0 - 2 \cdot (0 + 1) = S(1000).$$

Tani tregojmë se ndryshimi nuk mund të jetë 1 ose 2. Supozojmë se $m - n = 1$. Nëse numri n ka shifrën e parë më të vogël se 9, qartazi nuk mund të kemi $S(m) = S(n)$ pasi m dhe n dallojnë vetëm tek shifra e njësheve. Prandaj mund të supozojmë se

$$n = \overline{\cdots x \underbrace{99 \cdots 9}_k}$$

ku shifra 9 përsëritet k herë, dhe x është shifër ≤ 8 . Tani për numrin m kemi

$$m = n + 1 = \overline{\cdots (x+1) \underbrace{00 \cdots 0}_k}.$$

Pasi shifrat e m dhe n pas shifrës në pozitë $k+1$ janë të njëjta, mjafton të krahasojmë $k+1$ shifrat e para. Nëse k është tek, kemi

$$S(n) = \frac{k+1}{2} \cdot 9 - 2 \cdot \left(\frac{k-1}{2} \cdot 9 + x \right) = \frac{-k+3}{2} \cdot 9 - 2x + \cdots, S(m) = -2(x+1) + \cdots,$$

ku $+\dots$ nënkupton veprimin e Anës në shifrat pas x . Tani $S(m) = S(n)$ jep $\frac{-k+3}{2} \cdot 9 = -2$, por asnjë numër tek k nuk është zgjidhje e këtij ekuacioni.

Ngjashëm, nëse k është çift, kemi

$$S(n) = \frac{k}{2} \cdot 9 + x - 2 \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot 9\right) + \dots = -\frac{k}{2} \cdot 9 + x, S(m) = x + 1 + \dots$$

Përsëri $S(m) = S(n)$ jep $-\frac{k}{2} \cdot 9 = 1$, që nuk vlen për asnjë numër çift k .

Tutje supozojmë se $m - n = 2$. Nëse numri n ka shifrën e parë më të vogël se 8, qartazi nuk mund të kemi $S(m) = S(n)$ pasi m dhe n dallojnë vetëm tek shifra e njësheve. Kështu mund të supozojmë se

$$n = \overline{\dots x \underbrace{99 \dots 9}_k a}$$

ku shifra 9 përsëritet k herë, $a \in \{8, 9\}$ dhe x është shifër ≤ 8 . Për numrin m kemi

$$m = n + 2 = \overline{\dots (x+1) \underbrace{00 \dots 0}_k (a-8)}.$$

Sikur më herët, shifrat e m dhe n pas shifrës në pozitën $k+2$ janë të njëjta, prandaj mjafton të krahasojmë $k+2$ shifrat e para. Nëse k është tek, kemi

$$S(n) - S(m) = a + \frac{k-1}{2} \cdot 9 + x - 2 \cdot \left(\frac{k+1}{2} \cdot 9\right) - ((a-8) + x + 1) = -\frac{k+3}{2} + 7$$

që nuk mund të jetë 0 për asnjë numër tek k . Nëse k është çift, kemi

$$S(n) - S(m) = a + \frac{k}{2} \cdot 9 - 2 \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot 9 + x\right) - ((a-8) - 2 \cdot (x+1)) = -\frac{k}{2} \cdot 9 + 10$$

që poashtu nuk mund të jetë 0 për asnjë numër çift k . ▲

Shënim 1. Vlerat $k = 1, 2$ mund të eliminohen shumë më lehtë duke vërejtur se $S(n) \equiv n \pmod{3}$, prandaj që të kemi $S(n+k) = S(n)$, patjetër duhet të vlejë $k \equiv 0 \pmod{3}$.

Shënim 2. Shembulli $n = 997$ mund të gjendet me llogaritje të ngjashme sikur në zgjidhjen sipër. Për shembull për k çift fitojmë ekuacionin

$$S(n) - S(m) = a + \frac{k}{2} \cdot 9 - 2 \cdot \left(\frac{k}{2} \cdot 9 + x\right) - ((a-7) - 2 \cdot (x+1)) = -\frac{k}{2} \cdot 9 + 9$$

që është 0 për $k = 2$ dhe cilëndo nga shifrat $a \in \{7, 8, 9\}$. Në fakt, kjo llogaritje tregon se ekzistojnë pafundësisht numra të tillë duke marrur $n = \overline{\dots x99a}$ ku shifrat pas shifrës x janë të çfarëdoshme, $0 \leq x \leq 8$ dhe $a \in \{7, 8, 9\}$.